6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Einführung

In allen Gleichungen, die bisher auftraten, handelte es sich bei den gesuchten Größen um reelle oder komplexe Zahlen bzw. um Vektoren oder Matrizen von solchen.

Jetzt untersuchen wir Gleichungen, aus denen eine unbekannte Funktion zu ermitteln ist. Wenn dabei neben der Funktion auch noch ihre Ableitungen in der Gleichung vorkommen, so spricht man von einer Differentialgleichung (DGL). Die höchste vorkommende Ableitung gibt die Ordnung der DGL an.

Man unterscheidet **gewöhnliche** und **partielle** DGL'n, je nachdem, ob die gesuchte Funktion nur von einer oder von mehreren reellen Variablen abhängt. Wir betrachten in diesem Kapitel nur gewöhnliche DGL'n.

Die Lösungsfunktionen einer DGL werden auch als **Integrale der DGL** bezeichnet. Da DGL'n in der Regel unendlich viele Lösungen besitzen, unterscheidet man zwischen der **allgemeinen Lösung** (dem allgemeinen Integral) als der Menge aller Lösungen und jeder **speziellen (partikulären) Lösung**.

Es leuchtet ein, dass die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung n freie Parameter (Integrationskonstanten) enthält. Praktisch interessieren fast immer nur spezielle Lösungen, die neben der DGL noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen.

Dabei unterscheidet man vor allem

- **Anfangsbedingungen** (für die Funktion und ihre Ableitungen sind Werte an **nur einer Stelle** vorgegeben) und

- **Randbedingungen** (für die Funktion und ihre Ableitungen sind Werte an **mehreren Stellen** vorgegeben).

Entsprechend heißen die Problemstellungen dann **Anfangswertprobleme (Anfangswertaufgaben)** bzw. **Randwertprobleme (Randwertaufgaben)**. Als Abkürzungen verwendet man **AWP** für Anfangswertprobleme und **RWP** für Randwertprobleme.

Wenn man die Lösung einer DGL nach endlich vielen Umformungs- und Integrationsschritten in der Form $y = f(x)$ angeben kann, sagt man: **Die DGL ist**

geschlossen lösbar (integrierbar).

Dies ist nicht immer möglich bzw. praktisch sinnvoll. Deshalb sind auch bei diesen Aufgabenstellungen numerische Verfahren außerordentlich bedeutsam.

Zunächst betrachten wir aber einige Klassen von DGL'n, die man geschlossen lösen kann.

6.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.2.1 Trennung der Variablen

Lässt sich eine DGL in die Form

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

bringen, so kann man sie geschlossen lösen, sofern sich die folgenden Integrale geschlossen angeben lassen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

6.2.2 Lineare Differentialgleichungen

Das Attribut “linear“ bezieht sich auf die gesuchte Funktion und ihre Ableitung, nicht auf die unabhängige Veränderliche x. Der Prototyp einer linearen DGL 1. Ordnung ist

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x)} \qquad (1)$$

Für $g(x) = 0$ heißt die DGL **homogen**; anderenfalls ist sie **inhomogen** mit dem **Störglied** $g(x)$.

Für lineare DGL'en (nicht nur erster Ordnung) gilt die folgende sehr wichtige Aussage:

Ist y_h die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + f(x) \cdot y = 0$ und y_p eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL (1), so ist

$$\boxed{y_{all} = y_h + y_p}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (1).

Auf einen vollständigen Beweis verzichten wir. Es ist aber klar, dass y_{all} die DGL (1) erfüllt:

$$y_h' + y_p' + f(x) \cdot (y_h + y_p) = \underbrace{y_h' + f(x) \cdot y_h}_{=0} + \underbrace{y_p' + f(x) \cdot y_p}_{=g(x)} = g(x)$$

Auf dieser Aussage basiert die Herleitung der **allgemeinen Lösung einer linearen**

DGL 1. Ordnung.

Im Ergebnis erhält man

$$\boxed{\boxed{y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C\right)}}.$$

$\boxed{\text{Dabei ist } F(x) \text{ eine Stammfunktion von } f(x) \text{ und } C \in \mathbb{R}.}$

Beweis:

Die homogene DGL lässt sich mit der Methode der Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx, \qquad y \neq 0 \qquad \Rightarrow$$

$\ln|y| = -F(x) + C_1 \qquad$ mit $\qquad F(x) = \int f(x)dx \qquad$ und $\qquad C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = C_2 \cdot e^{-F(x)} \qquad$ mit $\qquad C_2 > 0$

$y_1 = C_2 \cdot e^{-F(x)} \qquad$ mit $\qquad C_2 > 0 \qquad \wedge \qquad y_2 = C_3 \cdot e^{-F(x)} \qquad$ mit
$C_3 = -C_2 < 0$

Da auch $y_3 = 0$ die DGL löst, kann man alle drei Fälle zusammenfassen und erhält so die **allgemeine Lösung der homogenen DGL**:

$$y_h = C \cdot e^{-F(x)} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad F(x) = \int f(x)dx.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL (1) zu erhalten, wählen wir für diese den Ansatz

$$y_p = k(x) \cdot e^{-F(x)}.$$

Mit	$y_p' = k'(x) \cdot e^{-F(x)} - k(x) \cdot F'(x) \cdot e^{-F(x)} \qquad$ und $\qquad F'(x) = f(x)$
erhalten wir	$k'(x) \cdot e^{-F(x)} - k(x) \cdot f(x) \cdot e^{-F(x)} + f(x) \cdot k(x) \cdot e^{-F(x)} = g(x)$,
also	$k'(x) \cdot e^{-F(x)} = g(x) \qquad$ bzw. $\qquad k'(x) = g(x) \cdot e^{F(x)}$.

Somit ergibt sich $\qquad k(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$

und damit die **partikuläre Lösung**

$$y_p = k(x) \cdot e^{-F(x)} = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx.$$

Für die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung erhalten wir damit wegen $y_{all} = y_h + y_p$ das oben angegebene Ergebnis.

6.2.3 Gemischte Beispiele

Schlussbemerkung zu DGL´en 1. Ordnung:

1. Man muss erkennen, ob die DGL linear oder nichtlinear ist.

2. Wenn die DGL **linear** ist, kann man die fertige **Lösungsformel anwenden** (nachdem man die Normalform hergestellt hat).

Eine **nichtlineare DGL** kann man mit unserem Kenntnisstand nur lösen, wenn sich die **Trennung der Variablen** anwenden lässt.

6.3 Lineare DGL'en 2. Ordnung

$$\boxed{a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)}$$

Wir betrachten nur solche Fälle, in denen sich die DGL einfach in geschlossener Form lösen lässt. Anderenfalls ist wieder ein geeignetes numerisches Verfahren heranzuziehen.

Wie bereits erwähnt, gilt für lineare DGL'en - unabhängig von der Ordnung - die Tatsache, dass sich die allgemeine Lösung als Summe von allgemeiner Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL darstellen lässt:

$$\boxed{y_{all} = y_h + y_p}.$$

Besonders einfach gestaltet sich der Lösungsweg, wenn die Koeffizienten a, b, c nicht von x abhängen, also konstant sind:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = g(x)}.$$

Man geht in zwei Schritten vor:

1. Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der **homogenen** DGL und

2. beschafft man sich anschließend irgend eine spezielle Lösung der **inhomogenen** DGL.

6.3.1 Homogene lin. DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad (1)$$

Man kann nachweisen, dass die Menge der Lösungen einen 2-dimensionalen Raum bildet. Damit reicht es aus, zwei linear unabhängige Lösungen (die sogenannten **Basis- bzw. Fundamentallösungen**) zu ermitteln.

Damit reicht es aus, zwei **linear unabhängige Lösungen** $y_1(x)$ und $y_2(x)$ (die sogenannten **Basis- bzw. Fundamentallösungen**) zu ermitteln.

Die lineare Unabhängigkeit ist so erklärt wie für Vektoren:

$y_1(x)$ und $y_2(x)$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \qquad (\forall x \in D)$$

nur für

$$\lambda_1 = 0 \;\wedge\; \lambda_2 = 0$$

erfüllt ist.

Da mit der Gleichung

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$$

zwangsläufig auch die Gleichung

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0$$

erfüllt sein muss, haben wir somit (für jedes konkrete x) ein homogenes LGS.

Gilt für dessen Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

so gibt es nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0 \;\wedge\; \lambda_2 = 0$, so dass dann die beiden Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sind.

Die Determinante $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ wird als WRONSKI-Determinante bezeichnet.

Zurück zur homogenen DGL:

Der Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

führt zu den Fundamentallösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der zugehörigen homogenen DGL, aus denen man dann die **allgemeine Lösung der homogenen DGL** zusammensetzen kann:

$$\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2}.$$

Wir schildern jetzt, wie man zu den Fundamentallösungen kommt.

Aus dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ erhält man $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Durch Einsetzen in die homogene DGL erhält man nach Division durch $e^{\lambda x}$ die sogenannte **charakteristische Gleichung der DGL**

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}.$$

Je nach der Beschaffenheit der Wurzeln dieser quadratischen Gleichung haben die Fundamentallösungen folgendes Aussehen.

1. Fall: Zwei verschiedene reelle Wurzeln $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow \qquad \underline{y_1 = e^{\lambda_1 x}}, \qquad \underline{y_2 = e^{\lambda_2 x}}.$$

Nachweis:

a) Dass es sich um Lösungen handelt, ist wegen der Erfüllung der charakteristischen Gleichung selbstverständlich.

b) Bleibt noch der Nachweis der linearen Unabhängigkeit.

WRONSKI-Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e$$

2. Fall: Eine reelle Doppelwurzel $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$$\Rightarrow \quad \underline{y_1 = e^{\lambda x}}, \qquad \underline{y_2 = x e^{\lambda x}}.$$

Nachweis:

a) Dass es sich bei y_1 um eine Lösung handelt, ist klar. Auch y_2 erfüllt die DGL:

$$y_2 = x e^{\lambda x} \Rightarrow y_2' = (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \Rightarrow y_2'' = (2\lambda + \lambda^2 x) e^{\lambda x}$$

$$a y'' + b y' + c y = a(2\lambda + \lambda^2 x) e^{\lambda x} + b(1 + \lambda x) e^{\lambda x} + c x e^{\lambda x} =$$
$$(a\lambda^2 + b\lambda + c) x e^{\lambda x} + (2a\lambda + b) e^{\lambda x} = 0$$

b) WRONSKI-Determinante:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (1 + \lambda x) e^{2\lambda x} - \lambda x e^{2\lambda x} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

3. Fall: Ein komplexes Wurzelpaar $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta j$

$$\Rightarrow \quad \underline{y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x}, \qquad \underline{y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}.$$

Nachweis:

a) Analog zum 1. Fall erhält man die beiden komplexen Lösungen

$$Y_{1/2} = e^{(\alpha \pm \beta j) x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm j \sin \beta x).$$

Allgemein kann man zeigen, dass für eine komplexe Lösung $Y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ der reellen DGL (1)

der Real- und der Imaginärteil für sich reelle Lösungen sind:

$$a Y'' + b Y' + c Y = a u'' + b u' + c u + j(a v'' + b v' + c v) = 0 \Leftrightarrow a u'' + b u' + c u = 0 \wedge$$

Damit sind $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ zwei reelle Lösungen.

b) WRONSKI-Determinante:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x & e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \\ (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) \cdot e^{\alpha x} & (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \cdot e^{\alpha x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} [\cos \beta x (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) - \sin \beta x (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)]$$

$$= e^{2\alpha x} [\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \sin \beta x \cos \beta x + \beta \sin^2 \beta x] = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

6.3.2 Inhomogene lin. DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{ay'' + by' + cy = g(x)}$$

Nachdem man die allgemeine Lösung der homogenen DGL bestimmt hat, genügt es wegen

$$\boxed{y_{all} = y_h + y_p},$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu finden. Dazu bedient man sich eines geigneten Ansatzes.

1. Methode: Variation der Konstanten

Ein immer zum Ziel führender (allerdings ziemlich rechenaufwendiger) Ansatz hat die Gestalt

$$y_p = K_1(x) \cdot y_1 + K_2(x) \cdot y_2,$$

wobei y_1, y_2 die beiden Fundamentallösungen der homogenen DGL sind. Durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen in die DGL kann man dann $K_1(x)$ und $K_2(x)$ ermitteln. Wir verzichten auf eine ausführliche Schilderung der Methode.

2. Methode: Ansatz passend zur rechten Seite

In praktisch allen interessierenden Fällen gelangt man meistens schneller zum Ziel, wenn man den **Ansatz passend zum Störglied** $g(x)$ der DGL, wählt.

1. Fall: Störfunktion ist ein Polynom

Störfunktion: $\boxed{g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}$

Ansatzfunktion: $\boxed{G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n}$

Beachte den **Resonanzfall:** $\boxed{\lambda = 0}$

Beispiel ohne Resonanz: $y'' + 4y' - 12y = 2x^2 - 8$

$\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 2$ *(beide* $\neq 0$*)*

$y_h(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$

Ansatz: $y_p(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2$

Beispiel mit Resonanz: $y'' + 4y' = 2x^2 - 8$

$\lambda_1 = -4,\ \underline{\lambda_2 = 0}$

$y_h(x) = C_1e^{-4x} + C_2$

Ansatz: $y_p(x) = x \cdot (B_0 + B_1x + B_2x^2)$

2. Fall: Störfunktion ist ein Produkt aus Polynom und e-Funktion

Störfunktion: $\boxed{g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) \cdot e^{mx}}$

Ansatzfunktion: $\boxed{G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n) \cdot e^{mx}}$

Beachte den **Resonanzfall:** $\boxed{\lambda = m}$

Beispiel ohne Resonanz: $y'' + 4y' - 12y = e^{5x}(2x^2 - 8)$

$\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 2 \qquad$ *(beide* $\neq 5$*)*

$y_h(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$

Ansatz: $y_p(x) = e^{5x}(B_0 + B_1x + B_2x^2)$

Beispiel mit Resonanz: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(2x^2 - 8)$

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}$

$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

Ansatz: $y_p(x) = e^{2x} \cdot x^2 \cdot (B_0 + B_1x + B_2x^2)$

3. Fall: Störfunktion ist eine Kombination von Sinus- und Kosinusfunktionen

Störfunktion: $\boxed{g(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)}$

Ansatzfunktion: $\boxed{G(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)}$

Beachte den **Resonanzfall:** $\boxed{\lambda = \pm kj}$

Beispiel ohne Resonanz: $y'' + 4y' + 13y = 2\sin(5x)$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j \quad (\neq \pm 5j)$

$y_h(x) = e^{-2x} \cdot (C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))$

Ansatz: $y_p(x) = A\cos(5x) + B\sin(5x)$

Beispiel mit Resonanz: $y'' + 4y = 3\cos(2x)$

$\lambda_{1/2} = \pm 2j$

$y_h(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$

Ansatz: $y_p(x) = x \cdot (A\cos(2x) + B\sin(2x))$

4. Fall: Störfunktion ist ein Produkt aus denen im 2. und 3. Fall

Störfunktion: $\boxed{g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) \cdot e^{mx} \cdot (a\cos(kx) + b\sin(kx))}$

Ansatzfunktion:

$\boxed{G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n) \cdot e^{mx} \cdot (A\cos(kx) + B\sin(kx))}$

Beachte den **Resonanzfall:** $\boxed{\lambda = m \pm kj}$

Beispiel ohne Resonanz: $y'' + 4y' + 13y = (2x^2 - 8)e^{2x} \sin(3x)$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j$

$y_h(x) = e^{-2x} \cdot (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Ansatz:

$y_p(x) = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2) \cdot e^{2x} \cdot (A \cos(3x) + B \sin(3x))$

Beispiel mit Resonanz: $y'' + 4y' + 13y = (2x^2 - 8)e^{-2x} \cos(3x)$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j$

$y_h(x) = e^{-2x} \cdot (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Ansatz:

$y_p(x) = x \cdot (B_0 + B_1 x + B_2 x^2) \cdot e^{-2x} \cdot (A \cos(3x) + B \sin(3x))$

Merke:

1.) Resonanzfall liegt vor, wenn das angegebene λ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Im Resonanzfall ist der Ansatz jeweils um den Faktor x^r zu erweitern, wobei r die Vielfachheit der Wurzel bedeutet.

2.) Aus obigen 4 Fällen ergeben sich weitere Spezialfälle, wenn z.B. das Polynom zu einer Konstanten entartet oder wenn in der e –Fkt $m = 0$ ist (so dass der Faktor e^{mx} zu 1 entartet).

3.) Besteht die rechte Seite aus einer Summe von mehreren Störgliedern, so kann man für jedes Störglied einzeln die zugehörige partikuläre Lösung ermitteln und diese anschließend additiv zu einem y_p zusammenfügen.

6.4 Systeme von linearen DGL ´en 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Jetzt sind gleichzeitig 2 Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ aus dem System

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x) \cdot y_1 + a_{12}(x) \cdot y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x) \cdot y_1 + a_{22}(x) \cdot y_2 + g_2(x) \end{aligned}}$$

zu ermitteln. Ist $g_1(x) \equiv 0$ und $g_2(x) \equiv 0$, so ist das System homogen, anderenfalls inhomogen.

Ein solches System kann auch im Matrizenkalkül geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Beispiel:

$$y_1' = 3x \cdot y_1 + (2 - x^2) \cdot y_2 + 4\sin x$$
$$y_2' = y_1 - \frac{5}{x} \cdot y_2 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 2 - x^2 \\ 1 & -\frac{5}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sin x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen DGL ´en 2. Ordnung und Systemen von linearen DGL ´en 1. Ordnung.

So kann man jede lineare DGL 2. Ordnung

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$

als ein System von 2 linearen DGL ´en 1, Ordnung schreiben:

Mit $y_1 = y$ und $y_2 = y'$ erhält man

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -\frac{b(x)}{a(x)} \cdot y_2 - \frac{c(x)}{a(x)} \cdot y_1 + \frac{g(x)}{a(x)}.$$

Dies spielt zum Beispiel eine Rolle, wenn man ein AWP höherer Ordnung numerisch lösen will bzw. muss.

Umgekehrt kann man ein DGL-System mit **konstanten** Koeffizienten lösen, indem man es auf eine DGL 2. Ordnung zurückführt. Zu diesem Zweck löst man (beispielsweise) die erste Gleichung des Systems

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{aligned}}$$

nach y_2 auf und setzt diesen Ausdruck nebst seiner Ableitung in die zweite Gleichung ein:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)) \Rightarrow y_2' = \frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}y_1' - g_1'(x))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}y_1' - g_1'(x)) = a_{21}y_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}}(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)) + g_2(x)$$

$$\Rightarrow y_1'' - a_{11}y_1' - g_1'(x) = a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}[y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)] + a_{12} \cdot g_2(x)$$

$$\Rightarrow y_1'' = a_{11}y_1' + g_1'(x) + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}[y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)] + a_{12} \cdot g_2(x)$$

$$\Rightarrow y_1'' = (a_{11} + a_{22})y_1' - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 + g_1'(x) - a_{22}g_1(x) + a_{12} \cdot g_2(x)$$

$$\Rightarrow \underline{y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = g_1'(x) - a_{22}g_1(x) + a_{12} \cdot g_2(x)}$$

Andere Lösungsvariante: Man löst zunächst wieder erst das homogene System mit Hilfe des Ansatzes

$$y_1 = u_1 \cdot e^{\lambda x}, \qquad y_2 = u_2 \cdot e^{\lambda x}.$$

Dieser führt zu

$$\begin{aligned} \lambda u_1 \cdot e^{\lambda x} &= a_{11} u_1 \cdot e^{\lambda x} + a_{12} u_2 \cdot e^{\lambda x} \\ \lambda u_2 \cdot e^{\lambda x} &= a_{21} u_1 \cdot e^{\lambda x} + a_{22} u_2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda u_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 \\ \lambda u_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit führt diese Variante auf ein Matrix-Eigenwertproblem.