

5. Funktionen von zwei und mehr Variablen

5.1 Differentialrechnung

5.1.1 Partielle Ableitungen

Schneidet man den Graphen der Funktion $z = f(x, y)$ mit einer Ebene $y = \text{const.}$ so entsteht als Schnittfigur eine Kurve, die als Graph einer Funktion einer Veränderlichen interpretiert werden kann. Für diese kann die erste Ableitung in bekannter Weise als Grenzwert des Differenzenquotienten gebildet werden. Auf diese Weise gelangt man zum Begriff der **partiellen Ableitung nach x** :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + h, y_0) - z(x_0, y_0)}{h}$$

In gleicher Weise kann man die **partielle Ableitung nach y** erklären.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = z_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{z(x_0, y_0 + k) - z(x_0, y_0)}{k}$$

Mit diesen partiellen Ableitungen kann man umgehen wie mit Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen, indem man jeweils die Variable, nach der nicht abgeleitet wird, wie eine Konstante behandelt.



Nach demselben Prinzip kann man vier **partielle Ableitungen 2. Ordnung** definieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} \end{aligned}$$

Nach dem *Satz von Schwarz* stimmen die **gemischten partiellen Ableitungen** in den Bereichen überein, in denen sie stetig sind. Dadurch sind bei den allermeisten Funktionen von den vier tatsächlich nur drei partielle Ableitungen 2. Ordnung zu bestimmen.



In entsprechender Weise könnte man nun auch partielle Ableitungen **dritter und höherer Ordnung** erklären. In der Praxis kommt man aber zumeist mit denen bis zur zweiten Ordnung aus.

5.1.2 Linearisierung (Tangentialebene und totales Differential)

So wie man an eine Kurve unter bestimmten Voraussetzungen in einem Kurvenpunkt eine Tangente anlegen kann, kann man dies für eine Fläche im Raum mit einer Tangentialebene tun. Bei Funktionen einer Veränderlichen ist die erwähnte Voraussetzung die Differenzierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle. In Anlehnung daran nennt man eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen differenzierbar an der Stelle (x_0, y_0) , wenn man im Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$

eine Tangentialebene an das "Funktionsgebirge" legen kann.

Die Existenz der beiden partiellen Ableitungen ist dafür notwendig aber nicht hinreichend.

Fordert man jedoch zusätzlich die **Stetigkeit der partiellen Ableitungen**, so ist die Existenz der Tangentialebene (d.h. die Differenzierbarkeit der Funktion) gesichert.

Wir wollen jetzt die **Gleichung der Tangentialebene** im Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ (ihre Existenz sei vorausgesetzt) herleiten. Zu diesem Zweck erinnern wir uns an die Ebenengleichung in der Spatproduktform

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei \vec{a} und \vec{b} zwei Richtungsvektoren der Ebene sind.

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen können wir als Richtungsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}$$

wählen.

Dann erhalten wir als Gleichung der Tangentialebene

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = 0$$

bzw.

$$\boxed{z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)}$$

Dabei sind die partiellen Ableitungen an der Stelle P_0 zu nehmen.



Aus obiger Darstellung erkennt man deutlich den linearen Zuwachs der Funktion, der wie schon bei Funktionen einer Veränderlichen auch hier als Differential der Funktion bezeichnet wird. Genauer spricht man vom **totalen Differential der Funktion**:

$$\boxed{dz = z_x \cdot dx + z_y \cdot dy}$$

Dieses wird bevorzugt in der Fehlerrechnung verwendet.



5.1.3 Mittelbare Funktionen (Differentiation nach Parametern)

In einer Funktion $f(x, y)$ können die Variablen x und y selber wieder von einem oder mehreren

Parametern abhängen:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

bzw.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Demzufolge ist dann die Ausgangsfunktion mittelbar eine Funktion von

- dem Parameter t : $f(x, y) = f(x(t), y(t)) = f(t)$

bzw.

- von den beiden Parametern u und v : $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v)$.

Interessiert man sich für die Ableitung(en) der Ausgangsfunktion nach dem (den) Parameter(n), so ist deren Berechnung auch auf direktem Wege möglich, ohne dass man zunächst x und y ersetzt:

$$f(x, y) = f(x(t), y(t)) = f(t)$$

$$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

bzw.

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}}$$



5.1.4 Richtungsableitungen

Wir schneiden jetzt das "Funktionsgebirge" in einer beliebigen Richtung, wobei die Richtung entweder durch den Winkel α zur positiven x -Halbachse oder durch den Vektor \vec{a} in der (x, y) -Ebene gegeben ist. Die entstehende Schnittkurve kann man wiederum als Graphen einer Funktion einer Veränderlichen interpretieren. An diesen kann man im vorgegebenen Punkt $P(x_0; y_0; z_0)$ eine Tangente anlegen. Dadurch kann man den Tangens des Steigungswinkels dieser Tangente (bezogen auf die (x, y) -Ebene) als Ableitung in der Richtung α (in der Richtung \vec{a}) definieren.

Die erwähnte Tangente ergibt sich offenbar als Schnittgerade zwischen der Tangentialebene

$$\boxed{z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)}$$

und derjenigen Ebene, die senkrecht auf der (x, y) -Ebene steht und den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

enthält. Diese hat also die beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und genügt damit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bzw.

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$$

Aus den beiden Ebenengleichungen ermittelt man nun leicht die Gleichung der Tangente, indem man als freien Parameter $t = \frac{y - y_0}{a_2}$ wählt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \cdot z_x + a_2 \cdot z_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Aus dem Richtungsvektor dieser Geraden liest man die Steigung ab und kann somit die **Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ in Richtung des Vektors \vec{a} (des Winkels α)** definieren:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \cdot (a_1 z_x + a_2 z_y) = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot (a_1 z_x + a_2 z_y)$$

bzw.

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cdot \cos \alpha + z_y \cdot \sin \alpha.$$

Häufig verwendet man die Abkürzung

$$\text{grad}(z(x, y)) = \begin{pmatrix} z_x(x, y) \\ z_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{Gradient von } z)$$

und kann dann die Richtungsableitung auch noch in der Gestalt eines Skalarproduktes zweier Vektoren angeben:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z).$$

Bemerkung: Anstelle des grad -Symbols wird auch häufig das Symbol

$$\text{grad}(z) = \nabla z$$

(**Nabla-Operator**, Hamilton-Operators) verwendet.



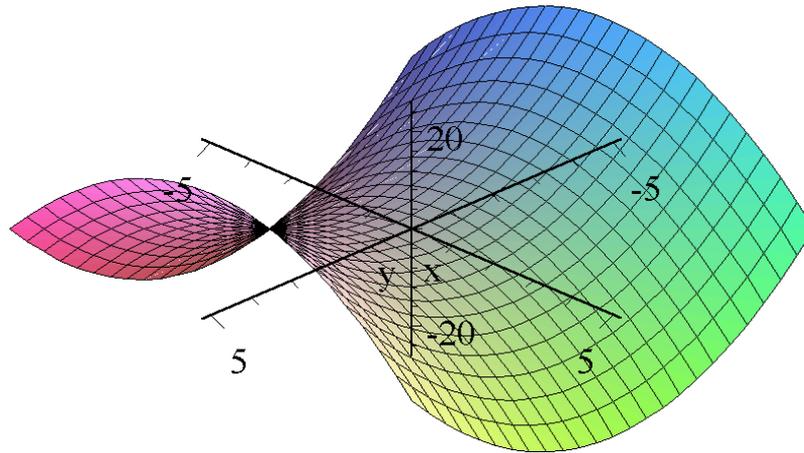
5.1.5 Relative Extremwerte

Wie schon bei Funktionen einer Veränderlichen gibt es auch bei Funktionen mehrerer Veränderlichen relative Extremstellen (d.h. in einer Umgebung sind alle Funktionswerte nicht kleiner bzw. nicht größer als an dieser Stelle), die man mit Hilfe der Differentialrechnung ermitteln kann und solche, bei denen diese versagt (z.B. Spitzen). Wir wollen in diesem Abschnitt nur die ersteren untersuchen. Für diese ist anschaulich klar, dass die Tangentialebene parallel zur (x, y) -Ebene liegen muss.

Es ergibt sich somit als **notwendige Bedingung für ein relatives Extremum** der Funktion $z = f(x, y)$:

$$\text{grad}(z(x, y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{array}$$

Alle Punkte der (x, y) -Ebene, für die diese notwendige Bedingung erfüllt ist, werden als stationäre Stellen der Funktion bezeichnet. Neben den relativen Extrema gehören dazu insbesondere auch die **Sattelpunktstellen**, die z.B. vorliegen, wenn die Schnittkurve in der x -Richtung ein relatives Minimum ausweist und in der y -Richtung ein relatives Maximum oder umgekehrt (siehe Bild zur Funktion $z(x, y) = x^2 - y^2$).



Eine **hinreichende Bedingung** kann analog zu den Funktionen einer Veränderlichen mit Hilfe der 2. partiellen Ableitungen formuliert werden. Wir geben eine solche ohne Beweis an:

Ist für eine stationäre Stelle (x_0, y_0)

- die **Diskriminante** $D(x_0, y_0) > 0$, so handelt es sich um ein relatives Extremum.
- Für $z_{xx}(x_0, y_0) < 0$ liegt dann ein **relatives Maximum** und
- für $z_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein **relatives Minimum** vor.

Dabei ist die Diskriminante mit Hilfe der 2. partiellen Ableitungen wie folgt definiert:

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} z_{xx}(x_0, y_0) & z_{xy}(x_0, y_0) \\ z_{yx}(x_0, y_0) & z_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = z_{xx}(x_0, y_0) \cdot z_{yy}(x_0, y_0) - (z_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Bemerkungen:

- 1.) Für den Max./Min.-Test kann anstelle von z_{xx} auch z_{yy} genommen werden. Warum?
- 2.) Ist $D(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein **Sattelpunkt** vor.
- 3.) Ist $D(x_0, y_0) = 0$, so ist keine Aussage möglich. Es müß ten Untersuchungen mit höheren Ableitungen angestellt werden.
- 4.) Für Funktionen mit **drei und mehr Variablen** bleiben die notwendigen Bedingungen (partielle Ableitungen gleich Null) erhalten. Die hinreichenden Bedingungen gestalten sich noch etwas komplizierter.



5.1.6 Methode der kleinsten Fehlerquadratsummen (Approximation im Mittel)

Bei Messwertanalysen steht man häufig vor dem Problem, aus einer meist recht umfangreichen Tabelle von Wertepaaren auf den analytischen Ausdruck für die dadurch gegebene Funktion schließen zu wollen. Der Typ der Funktion (z.B. linear, quadratisch, exponentiell usw.) ist dabei in der Regel aus den Wertepaaren heraus abschätzbar oder durch den praktischen Hintergrund ohnehin gegeben.



Allgemein betrachten wir jetzt also folgende Aufgabe. Gegeben ist eine Wertetabelle (Meßreihe)

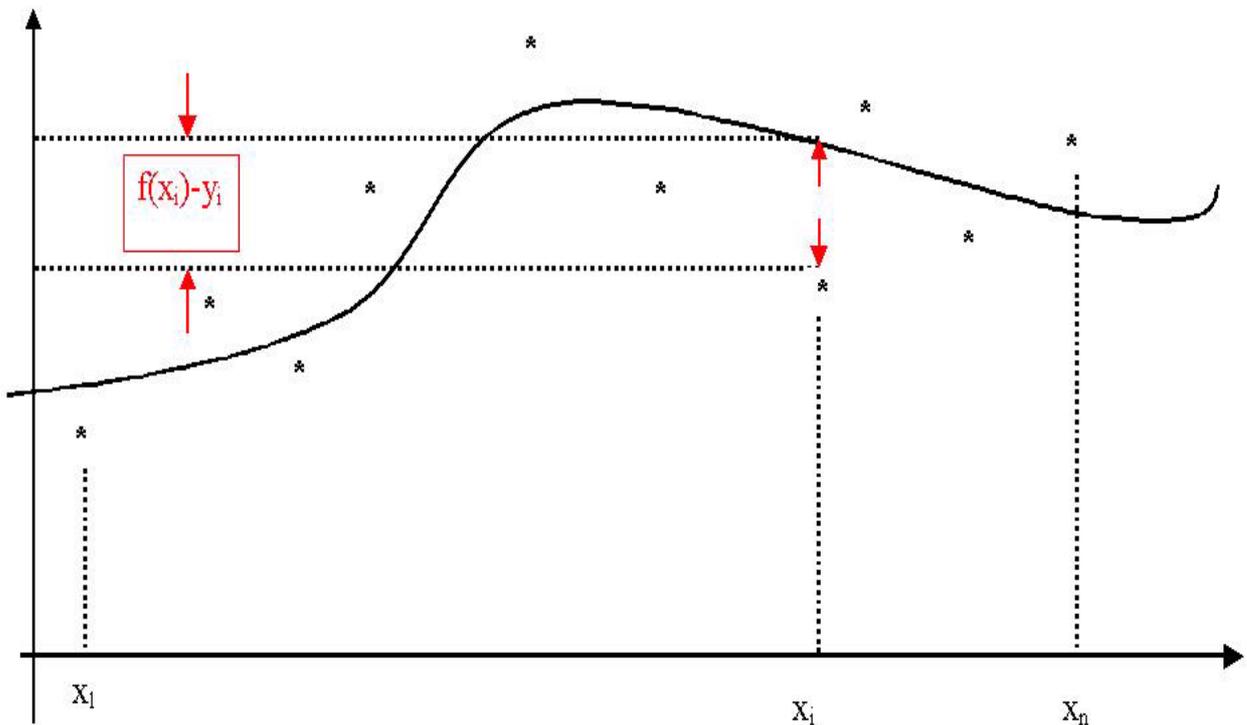
x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_n

und eine Funktionsvorschrift $y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$ mit den noch unbekanntenen Parametern a_1, a_2, \dots, a_m .

Wir ermitteln solche Werte für diese Parameter, dass man eine Funktion erhält, die unter allen Funktionen desselben Typs am besten die gegebenen Wertepaare widerspiegelt.

Als Kriterium dafür verwenden wir die **Fehlerquadratsumme**

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2$$



Man summiert also die quadrierten Abweichungen zwischen den (noch nicht ermittelten)

analytischen Funktionswerten und den vorgegebenen y-Werten über alle Wertepaare auf. Das Quadrieren hat dabei den Sinn, dass man die Auslöschung von Fehlern durch Summieren von positiven und negativen Abweichungen vermeiden möchte.

Damit die Fehlerquadratsumme $S(a_1, a_2, \dots, a_m)$ minimal wird, müssen notwendigerweise die partiellen Ableitungen Null werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_1} \cdot [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_2} \cdot [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i] = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_m} \cdot [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i] = 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Gleichungssystem von m Gleichungen mit den m Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_m . Handelt es sich bei dem Funktionstyp um eine Polynomfunktion, so ist das Gleichungssystem linear.

Die Überprüfung der hinreichenden Bedingungen ist in der Regel nicht erforderlich, da die Existenz eines Minimums durch die Konstruktion der Funktion S als Fehlerquadratsumme von vornherein feststeht.

Wir betrachten jetzt speziell den Fall der Approximation durch eine **lineare Funktion**

$$f(x; a, b) = ax + b$$

Man erhält: (In allen Summen ist über i von 1 bis n zu summieren.)

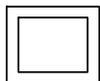
$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2 \cdot \sum x_i \cdot [ax_i + b - y_i] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2 \cdot \sum [ax_i + b - y_i] = 0 \end{aligned}$$

und somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \cdot \sum x_i + b \cdot n &= \sum y_i \end{aligned}$$

Dieses hat - da in der Praxis selbstverständlich alle x -Werte verschieden sind - stets genau eine Lösung:

$$a = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{(\sum y_i) \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



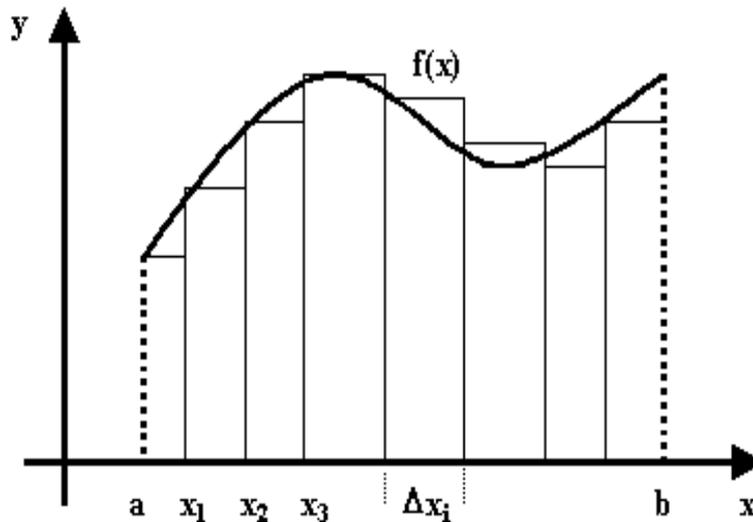
5.2 Integralrechnung

5.2.1 Flächenintegrale (Bereichsintegrale)

Das Riemannsches (bestimmte) Integral einer Funktion einer Variablen $\int_a^b f(x) dx$ hatten wir als

Grenzwert der Summe $\sum_{i=0}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ für $\Delta x \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ erklärt.

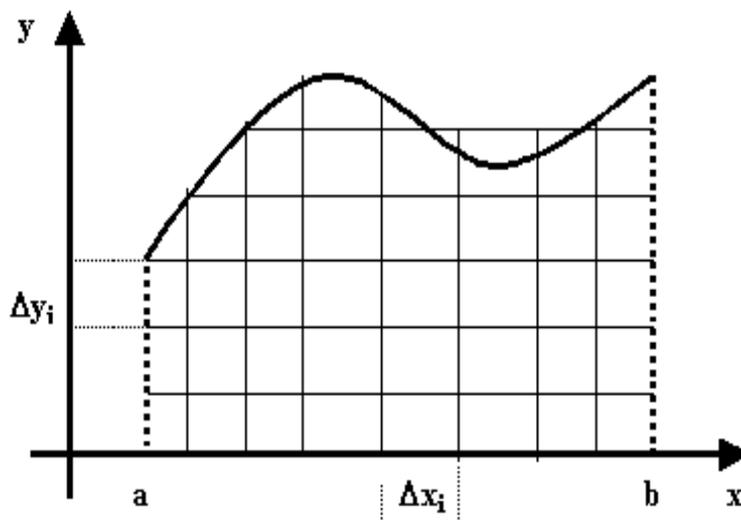
Eine mögliche Bedeutung ist die eines Flächeninhalts zwischen der durch $f(x)$ gegebenen Kurve (soweit sie oberhalb der x -Achse liegt), der x -Achse und den beiden Geraden $x = a$ und $x = b$.



Zu demselben Flächeninhalt würde man auch gelangen, wenn man sich den soeben beschriebenen Flächeninhalt durch eine Summe von vielen kleinen Rechteckflächen

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

approximiert denkt und dann sowohl Δx_i als auch Δy_j in geeigneter Weise gegen Null gehen lässt.



Damit sind wir in heuristischer Weise beim Begriff des **Bereichsintegrals (Doppelintegrals, Flächenintegrals)** angelangt:

$$\iint_{(B)} dx dy$$

Wir belassen es bei dieser heuristischen Einführung und erwähnen nur noch, dass natürlich jedes der kleinen Fächenelemente auch noch mit dem Wert einer dort definierten Funktion multipliziert werden kann:

$$\iint_{(B)} f(x,y)dA = \iint_{(B)} f(x,y)dxdy.$$

$dA = dxdy$ wird als **Flächenelement** bezeichnet. Von der praktischen Bedeutung der Funktion $f(x,y)$ (dem **Integranden**) hängt ab, welchen Wert das berechnete Integral praktisch darstellt. Beispielhaft ergeben sich folgende Anwendungen:

5.2.2 Anwendungen von Flächenintegralen

1. **Fläche eines ebenen Bereiches B :** $f(x,y) \equiv 1$

$$A = \iint_{(B)} dxdy$$

2. **Volumen eines zylindrischen Körpers** mit der Grundfläche B in der (x,y) -Ebene, der Deckfläche $f(x,y) \geq 0$ und zur z -Achse parallelen Mantellinien:

$$V = \iint_{(B)} f(x,y)dxdy$$

3. **Gesamtmasse eines mit Masse belegten ebenen Bereiches B :** (Macht Sinn für "dünne" Materialien.)

(Flächenbezogene Massendichte sei $\rho(x,y)$ mit z.B. der Maßeinheit $\frac{g}{cm^2}$.)

$$m = \iint_{(B)} \rho(x,y)dxdy$$

4. **Statische Momente eines ebenen Bereiches** bezüglich der x - und y -Achse:

$$M_x = \iint_{(B)} y \cdot \rho(x,y)dxdy$$

$$M_y = \iint_{(B)} x \cdot \rho(x,y)dxdy$$

5.2. **Schwerpunktskoordinaten eines ebenen Bereiches B :**

$$x_s = \frac{M_y}{m}, \quad y_s = \frac{M_x}{m}$$

5.2. **Trägheitsmomente eines ebenen Bereiches** bezüglich der x - und y -Achse

$$I_x = \iint_{(B)} y^2 \cdot \rho(x,y)dxdy$$

$$I_y = \iint_{(B)} x^2 \cdot \rho(x,y)dxdy$$

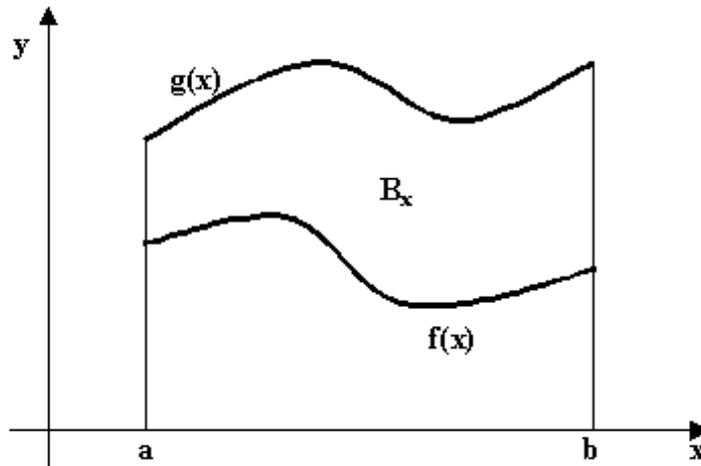
5.2. **Polares Trägheitsmoment:**

$$I_0 = \iint_{(B)} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y)dxdy$$

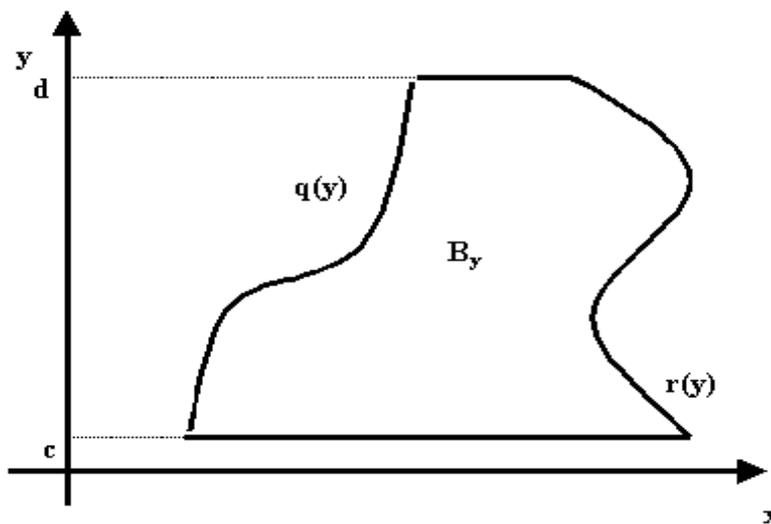
5.2.3 Berechnung von Bereichsintegralen

Die Berechnung gestaltet sich für sogenannte **Normalbereiche** besonders einfach. Wir erklären den Begriff des Normalbereiches in der Ebene.

$B_x = \{(x;y) / f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ heißt ein **Normalbereich bzgl. der x-Achse**:



$B_y = \{(x;y) / q(y) \leq x \leq r(y), c \leq y \leq d\}$ heißt ein **Normalbereich bzgl. der y-Achse**:



Für diese Bereiche lassen sich die Bereichsintegrale als **Doppelintegrale** wie folgt berechnen:

$$\iint_{(B_x)} f(x,y) dA = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f(x)}^{g(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

$$\iint_{(B_y)} f(x,y) dA = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=q(y)}^{r(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

Dabei wird jeweils im inneren Integral die andere Variable wie eine Konstante behandelt, so dass man normale bestimmte Integrale zu berechnen hat.

Kompliziertere Bereiche zerlegt man - falls möglich - in Normalbereiche und beachtet die Beziehung

$$\iint_{(B_1 \cup B_2)} f(x,y)dA = \iint_{(B_1)} f(x,y)dA + \iint_{(B_2)} f(x,y)dA$$



5.2.4 Polarkoordinaten

Für viele ebene Bereiche (zum Beispiel: Kreise, Sektorflächen) eignen sich Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

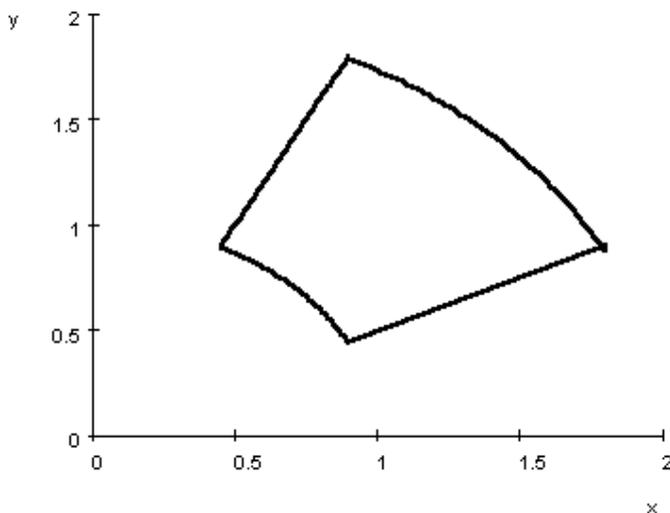
bzw. verschobene Polarkoordinaten

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi$$

besser als die kartesischen. In beiden Fällen gilt für das **Flächenelement**

$$dA = r \cdot dr d\varphi$$

Dieses Flächenelement ist ein "infinitesimal kleiner" Kreisringsektor $[r, r + dr] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$, den man näherungsweise als Rechteck mit den Seitenlängen dr und $r d\varphi$ auffassen kann.



Die exakte Herleitung des Flächenelementes in beliebigen Koordinaten ist wesentlich komplizierter.



Zusammenfassung der Vorgehensweise bei Flächenintegralen

1. Den Bereich B skizzieren, über den integriert werden soll!
2. Feststellen, ob es sich bei B um einen Normalbereich bzgl. der x – bzw. y – Achse handelt oder ob B in mehrere Normalbereiche zerlegt werden muss oder ob man wegen der kreis- bzw. kreisringähnlichen Gestalt besser zu Polarkoordinaten übergeht!

Merke: Der Bereich B bestimmt die Integrationsgrenzen!!

3. Ist der Integrand $f(x,y)$ schon gegeben oder muss er für den jeweiligen Anwendungsfall selbst ermittelt werden?

Merke: Der Integrand $f(x,y)$ resultiert aus der bzw. bestimmt die Anwendung. Er hat nichts mit den Integrationsgrenzen zu tun!

4a. Bei Berechnung in kartesischen Koordinaten:

	Normalbereich bzgl. x -Achse	Normalbereich bzgl. y -Achse
Inneres Integral (1. Integration)	über y	über x
Äußeres Integral (anschl. Integr.)	über x	über y

4b. Bei Berechnung in Polarkoordinaten:

- Integrationsgrenzen für r und φ anhand der Skizze festlegen. Inneres Integral ist in der Regel das über r , das äußere demzufolge über φ .

- Den Integranden $f(x,y)$ umrechnen in $F(r,\varphi)$ mittels $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$.

- Das Flächenelement $dx dy$ ersetzen durch $r dr d\varphi$.

Merke: Die **letzte Integration** muss immer in **konstanten Grenzen** erfolgen! (In Polarkoordinaten ist das meistens die über φ .)

5.2.5 Ausblick auf Volumenintegrale

Wenn der Bereich, über den integriert wird, dreidimensional ist, spricht man von einem Volumenintegral:

$$\int_{(V)} f(x,y,z) dV = \iiint_{(V)} f(x,y,z) dx dy dz$$

Auch hier gilt:

1. Der Integrand bestimmt die praktische Bedeutung des Integrals (siehe Folie).

2. Um die Berechnung durchführen zu können, muss der Bereich V als **Normalbereich** dargestellt bzw. in solche zerlegt werden. Die einfachste Variante eines Normalbereiches liegt vor, wenn der Bereich in der Form

$$V : u(x,y) \leq z \leq v(x,y) \wedge s(x) \leq y \leq t(x) \wedge a \leq x \leq b$$

dargestellt werden kann. Dann entsteht ein **Dreifachintegral**

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=s(x)}^{t(x)} \left(\int_{z=u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx,$$

das man wiederum "von innen nach außen abarbeiten" muss.

3. Für "zylinderförmige" Bereiche V verwendet man geschickter **Zylinderkoordinaten** (auch räumliche Polarkoordinaten genannt)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

mit dem Volumenelement

$$dV = r \cdot dzdrd\varphi.$$

4. Für "kugelförmige" Bereiche V verwendet man geschickter **Kugelkoordinaten**

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

mit dem Volumenelement

$$dV = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot drd\varthetad\varphi,$$

wobei φ wieder der Polarwinkel in der (x,y) -Ebene und ϑ der Winkel zwischen dem jeweiligen Ortsvektor und der z -Achse ist.

