Im Folgenden finden Sie die Aufgabenstellungen der bisherigen Klausuren Mathematik2 im Diplomstudium und Analysis 2 im Bachelorstudium der ET-Studiengänge sowie knapp gehaltene Ergebnisangaben. Die Lösungswege sind absichtlich nicht angegeben, Fragen können aber in den Übungen gestellt werden.

Alle Klausuren dauerten 120 Minuten.

Mathematik2-Klausur vom 28.06.2004, Erreichbare Punktzahl: 3+9+4+3+3+8+4=34

Aufgabe 01: Warum kann die Funktion $z(x,y) = \sin^2 x + 5xy + 3y - 1$ keine relativen (lokalen) Extrema besitzen?

Aufgabe 02: Durch $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$ wird ein Kreisring definiert. Aus diesem wird mittels der beiden Geraden $y = x$ und $y = \sqrt{3} \cdot x$ ein Sektor B im 1. Quadranten ausgeschnitten.

a) Skizzieren Sie diesen Kreisringsektor B und tragen Sie in die Skizze die beiden Polarwinkel φ_1 und φ_2 ein, die diesen Sektor festlegen!

b) Berechnen Sie die Fläche von B!

c) Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinaten von B (homogene Flächendichte vorausgesetzt)!

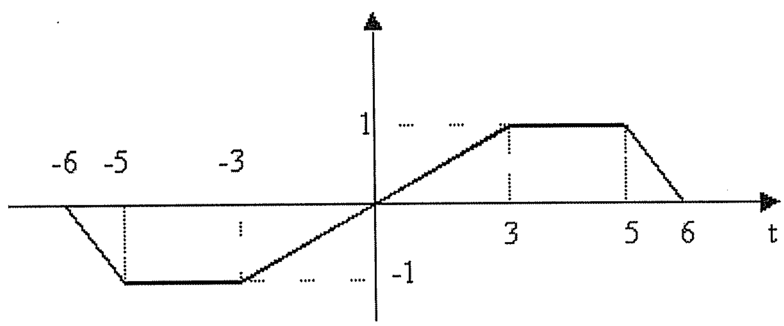
Aufgabe 03: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = e^{x-y}$!

Aufgabe 04: a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ an!

b) Wie lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = x \cdot e^{-2x}$?

Aufgabe 05: Weisen Sie nach, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-5}{k}\right)^{-k}$ divergiert!

Aufgabe 06: Im Bild ist der Graph einer periodischen Funktion $f(t)$ in ihrem Grundintervall gegeben. Diese Funktion soll in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, wobei Sie aber neben dem konstanten Glied $\frac{a_0}{2}$ nur das jeweils erste Sinus- und Kosinus-Glied ermitteln sollen!



Aufgabe 07: Berechnen Sie mittels der Integral-Definition die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \;!$$

Lösung 01:

$D(x,y) = 0 \cdot 2\cos 2x - 5^2 < 0 \Rightarrow$ kein rel. Extr. möglich!

Lösung 02: b) $A = \frac{\pi}{8}$

c) $x_s = \frac{28}{3\pi}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 0.944 \qquad y_s = \frac{28}{3\pi}\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 1.23$

Lösung 03: $y = \ln(e^x + C)$

Lösung 04: a) $y_h(x) = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-2x}$

b) $y_p(x) = (Ax + B) \cdot x^2 \cdot e^{-2x}$

Lösung 05: $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k-5}{k}\right)^{-k} = e^5 \neq 0$

Die Summanden der Reihe bilden keine Nullfolge; sie ist deshalb divergent.

Lösung 06: $f(t) = \begin{cases} -t-6 \text{ für } -6 \le t \le -5 \\ -1 \text{ für } -5 \le t \le -3 \\ \frac{1}{3}t \text{ für } -3 \le t \le 3 \\ 1 \text{ für } 3 \le t \le 5 \\ -t+6 \text{ für } 5 \le t \le 6 \end{cases}$.

$f(t)$ ist ungerade $\Rightarrow a_0 = 0 \wedge a_1 = 0; \qquad b_1 = \frac{10}{\pi^2} + \frac{12\sqrt{3} - 12}{\pi} \approx 3.81$

Lösung 07: $F(\omega) = a\frac{1 - e^{-2j\omega}}{j\omega}$

Mathematik2-Klausur vom 04.02.2005, Erreichbare Punktzahl: 6+4+5+7+5+5+4=36

Aufgabe 01: Die Funktion $f(x) = 2|x|, \; -1 < x \le 1,$ wird periodisch fortgesetzt.

Man berechne das Absolutglied $\frac{a_0}{2}$ sowie die jeweils ersten beiden Sinus- und Kosinus-Glieder der entsprechenden Fourier-Reihe!

Aufgabe 02: Ein Kreisring mit dem Innenradius $R_i = 2$ und dem Außenradius $R_a = 4$ ist mit der Massendichte ρ belegt, die proportional zum Abstand vom Mittelpunkt ist. Berechnen Sie die Masse!

Aufgabe 03: a) Wo ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ konvergent?

b) Die unter a) angegebene Reihe stellt in ihrem Konvergenzintervall eine Funktion $Y = F(x)$ dar. Welche bekannte Funktion stellt die Funktion $y = F''(x)$ in welchem Intervall dar?

Aufgabe 04: Berechnen Sie die lokalen Extremwerte (Lage und Funktionswert) der Funktion $f(x,y) = x^4 - 4x^2 + y^2 + 6y + 13$!

Aufgabe 05: Lösen Sie das Anfangswertproblem $xy' - y = x^2 \cos x, \quad y(\pi) = 2$!

Aufgabe 06: Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $2y'' - 8y' = 6x$!

Aufgabe 07: Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $z(x,y) = y\sin(\pi x) + \frac{x}{y}$ im Punkt $P(1;1;1)$ an!

Lösung 01: $a_0 = 2 \qquad a_1 = -\frac{8}{\pi^2} \qquad a_2 = 0$

Da die Funktion gerade ist, sind die b_n alle gleich Null.

Lösung 02: $m = \frac{112\pi\alpha}{3}$

Lösung 03: a) Konvergenzradius: $R = 1$

Linker Rand: Konvergenz Rechter Rand: Konvergenz

b) $y = F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ im Intervall $(-1,1]$

Lösung 04: $P_{E1}(0;-3)$ ist kein Extremwert ($D < 0$),

Rel. Minima bei $(\sqrt{2};-3;0)$, $P_{E3}(-\sqrt{2};0)$

Lösung 05: $y_{AB} = \frac{2}{\pi} \cdot |x| + x \cdot \sin x$

Lösung 06: $y_{al}(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}$

Lösung 07: $z_T(x,y) = (1-\pi)x - y + 1 + \pi$

Mathematik2-Klausur vom 28.06.2005, Erreichbare Punktzahl: 8+8+5+5+6+8=40

Aufgabe 01: Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3xy - 27x + 6x^2 - x^3 + 3y^2 - 60y$.

a) Geben Sie grafisch in der (x,y)–Ebene (im Intervall $0 \le x \le 5$) alle Punkte an, für deren Koordinaten die partielle Ableitung der Funktion nach x gleich Null ist!

b) Geben Sie grafisch in der (x,y)–Ebene (im Intervall $0 \le x \le 5$) alle Punkte an, für deren Koordinaten die partielle Ableitung der Funktion nach y gleich Null ist!

c) In welchem Punkt $(x_0;y_0)$ schneiden sich die beiden Kurven?

d) z_0 sei der Funktionswert der Funktion $f(x,y)$ an dieser Schnittstelle. Welche Eigenschaft hat die im Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ an das "Funktionsgebirge" angelegte Tangentialebene?

Aufgabe 02: Man berechne das Bereichsintegral $\iint_{(B)} (xy+1)dxdy$, wenn der Bereich B das Dreieck in der (x,y)–Ebene mit den Eckpunkten $A(1;3)$, $B(4;3)$ und $C(2;5)$ ist!

Aufgabe 03: Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i(t)$ aus der

Differentialgleichung $\frac{di}{dt} + i \cdot \cos t = 2\cos t$ mit der Anfangsbedingung $i(0) = 0$!

Aufgabe 04: a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 5y = 0$ an!

b) Wie lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$b_1)$ $y'' + 4y' + 5y = x \cdot e^{-2x}$ $\quad$ $b_2)$ $y'' + 4y' + 5y = 5\cos x$ $\quad$ $b_2)$ $y'' + 4y' + 5y = 2x^3$?

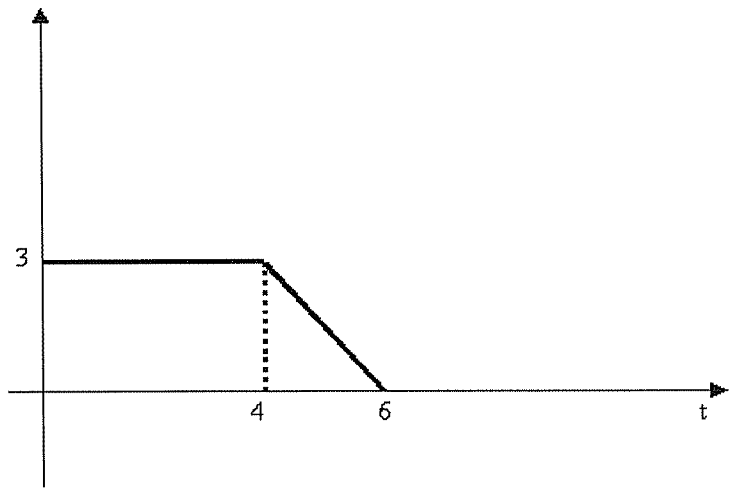
Aufgabe 05: Für die Arkustangens-Funktion gilt die Reihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

a) Für welche reellen x ist $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$?

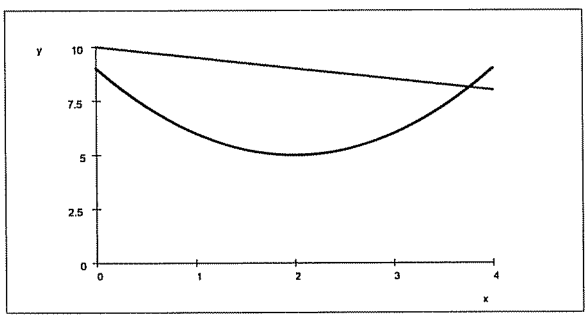
b) Leiten Sie hieraus eine Reihenentwicklung für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ab!

c) Für welche reellen x stimmt diese soeben hergeleitete Reihe tatsächlich mit $f(x)$ überein?

Aufgabe 06: Im Bild ist der Graph einer periodischen Funktion $f(t)$ in ihrem Grundintervall $[0, 6)$ gegeben. Berechnen Sie das konstante Glied $\frac{a_0}{2}$ und das erste Kosinus-Glied der zugehörigen Fourier-Reihe!



Lösung 01: a) $y = (x-2)^2 + 5$ $\quad$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 10$



a) schwarz

b) grün

c) $x_0 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65} \approx 3{,}77 \Rightarrow y_0 = (-\frac{7}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{65}) + 10 \approx 8{,}12$

d) Die Tangentialebene liegt dort parallel zur (x,y) –Ebene.

Lösung 02: $\iint\limits_{(B)} (xy+1)dxdy = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=3}^{2x+1} (xy+1)dxdy + \int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=3}^{-x+7} (xy+1)dxdy = \frac{57}{2}$

Lösung 03: $i_{AB}(t) = 2 - 2e^{-\sin t}$

Lösung 04: a) $y_h(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \cdot e^{-2x}$

b$_1$) $y_p(x) = (Ax+B) \cdot e^{-2x}$ b$_2$) $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$

b$_3$) $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Lösung 05: a) Die Reihe stimmt in $[-1,1]$ mit $\arctan x$ überein.

b) $\frac{1}{x^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ c) $\frac{1}{x^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ für $-1 < x < 1$

Lösung 06: . $a_0 = \frac{2}{6} \int\limits_0^4 3dt + \frac{2}{6} \int\limits_4^6 \left(-\frac{3}{2}t + 9\right)dt = 5 \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{5}{2}$

$a_1 = \frac{1}{3} \int\limits_0^4 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)dt + \frac{1}{3} \int\limits_4^6 \left(-\frac{3}{2}t + 9\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)dt = -\frac{27}{4\pi^2} \approx -0.684$

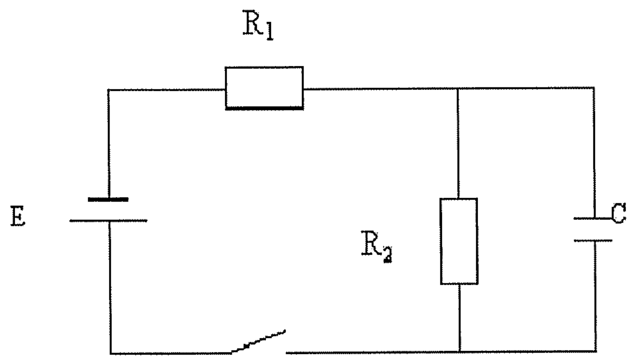
Mathematik2-Klausur vom 13.02.2006, Erreichbare Punktzahl: 10+5+9+8+3+10=45

Aufgabe 01: Man berechne die relativen Extremwerte und Sattelpunkte (falls vorhanden) der Funktion
$z = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$! (Die z-Werte brauchen nicht berechnet werden.)

Aufgabe 02: Gesucht ist das Volumen eines Körpers, der von den folgenden Flächen begrenzt wird:

$z = 0, \quad z = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 4$

Aufgabe 03:



Für die Kondensatorspannung u_c gilt während des Einschaltvorganges die Differentialgleichung

$CR \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = E \cdot \frac{R}{R_1}$,

wobei $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ gilt.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL!

b) Berechnen Sie die Integrationskonstante so, dass die Anfangsbedingung $u_c(0) = 0$ erfüllt ist!

c) Welche Spannung ergibt sich für den eingeschwungenen Zustand? ($t \to \infty$)

Aufgabe 04: Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' - 3y = xe^x$!

Aufgabe 05: Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ an! Die Konvergenz an den Rändern des Konvergenzintervalls braucht nicht untersucht zu werden.

Aufgabe 06: Entwickeln Sie die periodische Funktion $f(t) = |\sin t|$ in eine Fourier-Reihe!

Lösung 01: stationäre Punkte: $P_1(0;0)$, $P_2(0;2)$, $P_3(2;1)$, $P_4(-2;1)$

	z_{xx}	z_{yy}	z_{xy}	D		
P_1	-6	-24	0	144	rel. Extr.	Max.
P_2	6	24	0	144	rel. Extr.	Min.
P_3	0	0	12	-144	Sattelpunkt	
P_4	0	0	-12	-144	Sattelpunkt	

Lösung 02: $V = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (3 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) r\, d\varphi\, dr = 4\pi$

Lösung 03: a) $u_c(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{CR}} + E \cdot \frac{R}{R_1}$, $K \in \mathbb{R}$

b) $K = -E \cdot \frac{R}{R_1}$ c) $\lim\limits_{t\to\infty} u_c(t) = E \cdot \frac{R}{R_1}$

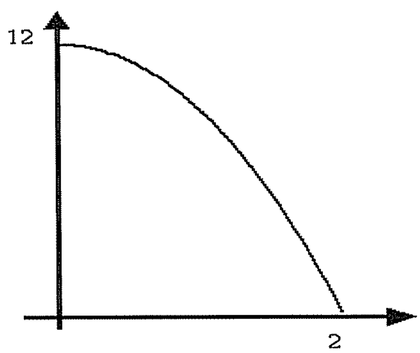
Lösung 04: $y_{all} = C_1 e^{-3x} + \left(C_2 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^x$ **Lösung 05:** $R = \frac{1}{e}$

Lösung 06: $f(t) = |\sin t| \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(2nt)}{\pi(4n^2-1)}$

Analysis2-Klausur vom 06.07.2007, Erreichbare Punktzahl: 6+8+7+7+6+6=40

Aufgabe 1: Es ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x\frac{dy}{dx} - y - 1 = 0$ gesucht.

Aufgabe 2:
Man berechne die Masse der in der Skizze gegebenen Fläche (die begrenzende Linie ist ein Parabelstück), wenn die Flächendichte ρ proportional zum Abstand von der y –Achse ist!



Aufgabe 3: Für die Differentialgleichung $y'' + 6y' + 9y = g(x)$ ist zunächst die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL zu ermitteln. Anschließend ist ein geeigneter Ansatz für eine

partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL mit folgender Inhomogenität zu finden.

a) $g(x) = x^2e^{-3x}$ bzw. b) $g(x) = x\cos 3x$

Aufgabe 4: Die Funktion $f(x) = 3|\cos 2x|$ soll in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Dabei sind aber nur die b_n und das a_0 wirklich auszurechnen. Für die Berechnung der a_n ist nur das Integral aufzuschreiben.

Aufgabe 5: a) Welchen Zahlenwert hat die unendliche Summe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2}{5^k}$?

b) Ist die Reihe $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{200n+100}{n^3-5n^2}$ konvergent oder divergent? (Herleitung!)

Aufgabe 6: a) Ausgehend von den bekannten Reihenentwicklungen $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ sind für die Funktion $f(x) = e^x \cdot \sin x$ die ersten Glieder der Maclaurin-Reihe (bis einschließlich x^3) anzugeben.

b) Warum konvergiert diese Maclaurin-Reihe für die Funktion $f(x) = e^x \cdot \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Lösung 1: Lineare DGL 1. Ordnung $\Rightarrow y(x) = Cx - 1$

Lösung 2: $m = \iint\limits_{(B)} \rho(x,y)dxdy = \rho \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{-3x^2+12} xdxdy = 12\rho \qquad (\rho(x,y) = \rho \cdot x)$

Lösung 3: $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$

a) $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)x^2e^{-3x}$

b) $y_p(x) = (Ax + B) \cdot (C\cos 3x + D\sin 3x)$

Lösung 4: $T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 4$

$f(x)$ ist eine gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 3\cos 2x dx = \frac{12}{\pi}, \qquad a_n = \frac{24}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cos 4nx dx$$

Lösung 5: a) $2 \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}$

b) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{200n+100}{n^3-5n^2} \le \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{200n+100n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = 600 \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ Konvergenz

Lösung 6: a) $e^x \cdot \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$

b) Weil sowohl die Reihe für e^x als auch die Reihe für $\sin x$ überall konvergieren.

==

Analysis2-Klausur vom 08.07.2008, Erreichbare Punktzahl: 6+8+7+5+7+7=40

==

Aufgabe 1: Man gebe je ein Beispiel an für

a) eine nichtlineare Differentialgleichung 1.Ordnung,

b) eine homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung,

c) eine unendliche harmonische Reihe, die konvergent ist,

d) eine unendliche geometrische Reihe, die divergent ist,

e) eine unendliche alternierende Reihe, die konvergent, aber nicht absolut-konvergent ist,

f) eine nicht-trigonometrische Funktion $f(t)$ mit der Periode 3, deren Fourier-Reihe keine Sinusglieder enthält!

Aufgabe 02: Handelt es sich bei den Punkten $P_1(1;1)$, $P_2(0;2)$, $P_3(2;1)$ um lokale Extremstellen der Funktion $z = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$! Wenn ja, liegt ein Minimum oder Maximum vor?

Aufgabe 3: Berechne das polare Trägheitsmoment - bezogen auf den Koordinatenursprung - einer homogenen Halbkreisscheibe $(x-2)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$!

Hinweis: Es empfehlen sich verschobene Polarkoordinaten!

Aufgabe 4: Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' + 6y' + 13y = g(x)$.

a) Berechne die allgemeine Lösung der DGL für $g(x) = 0$.

b) Wie lautet ein geeigneter Ansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL, wenn

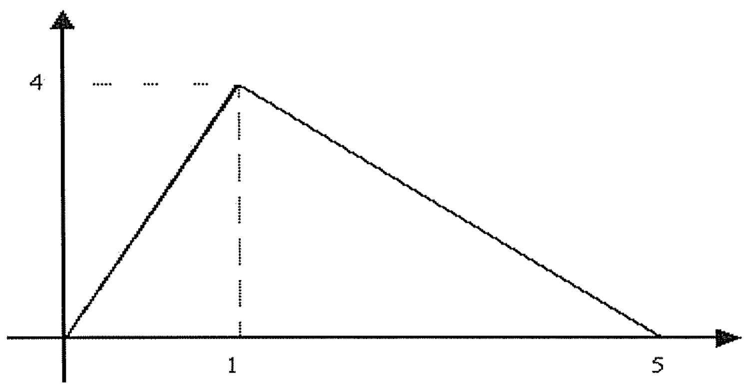
b$_1$) $g(x) = x^2e^{-3x}$ b$_2$) $g(x) = x\cos 2x$ b$_3$) $g(x) = xe^{-3x}\cos 2x$

ist.

Aufgabe 5: a) Welchen Zahlenwert hat die unendliche Summe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{5^k}$?

b) Welche Funktion $f(x)$ stellt die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^{n+1}}x^n$ in ihrem Konvergenzintervall dar?

Aufgabe 6: Der im Bild gegebene Graph einer Funktion $f(t)$ wird periodisch fortgesetzt.



Für die Fourierkoeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Reihe sind die Formeln anzugeben. Die

Integrale sollen nicht ausgerechnet werden.

Lösung 02: $z_y(1;1) \neq 0 \Rightarrow P_1(1;1)$ ist keine lokale Extremstelle.

$z_x(0;2) = 0 \wedge z_y(0;2) = 0 \quad \wedge \quad z_x(2;1) = 0 \wedge z_y(2;1) = 0$

	z_{xx}	z_{yy}	z_{xy}	D		
P_2	6	24	0	144	rel. Extr.	Min.
P_3	0	0	12	−144		kein Extr.

Lösung 3: $I_p = \frac{9\pi}{4} \cdot \rho$

Lösung 4: a) $y(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-3x}$

b$_1$) $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x}$ b$_2$) $y_p(x) = (Ax + B) \cdot (C\cos 2x + D\sin 2x)$

b$_3$) $y_p(x) = (Ax + B)x(C\cos 2x + D\sin 2x)e^{-3x}$

Lösung 5: a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)$

Lösung 6: $f(t) = \begin{cases} 4t & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ -t + 5 & \text{für } 1 \le t \le 5 \end{cases}$. $T = 5\left(\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{5}\right)$

$$a_0 = \frac{2}{5}\int_0^1 4t\,dt + \frac{2}{5}\int_1^5 (-t+5)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{5}\int_0^1 4t\cos\left(n\frac{2\pi}{5}t\right)dt + \frac{2}{5}\int_1^5 (-t+5)\cos\left(n\frac{2\pi}{5}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^1 4t\sin\left(n\frac{2\pi}{5}t\right)dt + \frac{2}{5}\int_1^5 (-t+5)\sin\left(n\frac{2\pi}{5}t\right)dt$$