Aufgaben zum Kapitel 5

Aufgabe 1: Bilden Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen (bei e nicht die gemischten)!

a) $f(x,y) = x^2 \ln y + y^2 \ln x + xy + 7$ b) $f(x,y) = e^{x+y^2} x^2 + ln(x^2) + y$

c) $f(x,y) = (x+7)^3 (y+1)^2$ d) $f(x,y) = \frac{x}{y^2} + x^4 e^y$

e) $f(x,y,z) = x^3 yz^2 + 2x^2 y^2 z + 5z^3$ f) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

g) $f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x}$ h) $f(x,y) = (1 + x^2 - 2y^2)^2$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die totalen Differentiale (erster Ordnung)!

a) $z = \sqrt{x-y} + \ln\sqrt{xy}$ b) $u = x^3 + xy^2 + 2yz^2$ c) $z = \sin(x^2 + y^2)$

Aufgabe 3: Zwei Widerstände sind parallelgeschaltet. Für den Ersatzwiderstand gilt: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Geben Sie die Fehlerschranken für den absoluten und relativen Fehler von R an, wenn $R_1 = (450 \pm 2)\Omega$ und $R_2 = (150 \pm 1)\Omega$ gemessen wurden!

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $z = f(x,y)$ im Punkt P_0 in der Richtung des Winkels α!

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $P_0(3;4;5)$ $\alpha = 45°$

b) $z = \sqrt{xy}$ $P_0(2;2;2)$ $\alpha = \frac{2}{3}\pi$

Aufgabe 5: Durch $T(x,y,z) = xy + 2yz$, $(x,y,z) \in B \subseteq R^3$, sei ein Temperaturfeld gegeben. Man bestimme die Änderung der Temperatur pro Längeneinheit im Punkt $P_0(2,1,-1)$ in Richtung des Vektors $\vec{e}_s = (1,1,1)^T$!

Aufgabe 6: Finden Sie alle stationären Punkte von

a) $z = 3x^2 y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$ b) $z = x^3 y^2 (1 - x - y)$.

An welchen Stellen hat $z = f(x,y)$ ein relatives Extremum (Minimum, Maximum, Extremwert)?

Aufgabe 7: Untersuchen Sie folgende Funktionen auf lokale Extremwerte:

a) $f(x,y) = x^3 - 27x - 4y + y^2$ b) $f(x,y) = x^4 - 4x^2 + y^2 + 6y + 13$

Aufgabe 8: Ein oben offener Behälter in Form eines Quaders soll $10m^3$ Fassungsvermögen haben. Er wird aus Blechtafeln zusammengeschweißt. Welche Abmessungen sind zu wählen, wenn

a) die Oberfläche minimal ausfallen soll,

b) die Länge der Schweißnähte minimal werden soll ?

Aufgabe 9: Berechnen Sie $\iint\limits_{(B)} (x+y)dA$ für den Bereich

$$B = \{(x;y) : 0 \le \ y \le 1 \wedge \ y \le x \wedge \ y \ge x-2\}$$

Aufgabe 10: Gesucht ist das Volumen eines Körpers, der von den folgenden Flächen begrenzt wird: $z = 0$, $z = xy^2$, $y^2 = x$, $x + 2y^2 = 3$

Aufgabe 11: Man berechne die Trägheitsmomente J_x und J_y des mit der konstanten Massendichte $\rho = 1$ belegten Kreisbereiches! $B : (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2a^2$, $(a, b) > 0)$.

Aufgabe 12: Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten des Trapezes, das von den Geraden $y = 0,\ y = 2,\ y = x - 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 6$ eingeschlossen wird!

Aufgabe 13: Eine kreisförmig gebogene Leiterschleife hat den Radius R. Sie wird senkrecht von einem Magnetfeld mit der Flußdichte $B(r) = B_0 \cdot e^{-r},\ \ r \ge 0,$ durchflutet, d.h. die Flußdichte $B(r)$ nimmt in radialer Richtung nach außen hin exponentiell ab.

Berechnen Sie den magnetischen Fluß Φ durch die Leiterschleife!

Hinweis: Für den magnetischen Fluß gilt $\Phi = \iint\limits_{(A)} B dA$.

Aufgaben zum Kapitel 6

Aufgabe 1: Wie lautet die allgemeine Lösung von

a) $y' = 2 - y$ b) $y' = 2x^3(1 + y^2)$?

Aufgabe 2: Lösen Sie das Anfangswertproblem $3x - 4yy' = 1$ mit $y(1) = 0$!

Aufgabe 3: Gesucht ist das allgemeine Integral von $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $x \ne -1$.

Aufgabe 4: Lösen Sie die Dgl.- Probleme!

a) $y'' + 2y' - 15y = 0$ b) $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x} + 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 1$

Aufgabe 5: Lösen Sie die Anfangswertprobleme!

a) $3x - 4yy' = 1,\ y(1) = 0$ b) $y' = y\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

a) $y' = \frac{y}{x}$ b) $y' = \frac{e^x}{y}$ c) $xy' - ay' - y + b = 0$

d) $xy' - \frac{y}{x+1} = 0$ e) $y' - xy + 2x = 0$

Aufgabe 7: Geben Sie die Lösungen nachstehender Differentialgleichungen bzw. AWP an!

a) $y'' + y = 0$ b) $y'' + y' = e^x$ c) $y'' - 7y' + 12y = 0$

d) $y'' + 6y' + 13y = 0$ e) $y'' + 5y' + 4y = 0$, mit $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ f) $y'' + y = x^2$

g) $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$ h) $y'' + y + x^2 + 6 = 0$, mit $y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$

Aufgaben zum Kapitel 7

Aufgabe 1: Prüfen Sie die Reihen a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(2n)!}$ und b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k^3 + 1}$ auf Konvergenz!

Aufgabe 2: Welche der folgenden Reihen sind absolut bzw. bedingt konvergent, und welche Reihen divergieren?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der Potenzreihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$!

Aufgabe 4: Man entwickle $f(x) = \ln x$ in eine nach Potenzen von $x - 1$ fortschreitende Potenzreihe! Welches ist ihr Konvergenzintervall?

Aufgabe 5: Unter Benutzung bekannter Potenzreihen der elementaren Grundfunktionen (siehe Formelsammlungen) sollen für

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ b) $f(x) = 2^x$

die Reihendarstellung (mit $x_0 = 0$) und die Konvergenzintervalle angegeben werden. Untersuchen Sie insbesondere das Konvergenzverhalten an den Intervallenden!

Aufgabe 6: Entwickeln Sie die periodische Funktion $f(x) = f(x + 2\pi)$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe!

Aufgabe 7: $f(x) \equiv 1$ für $0 < x \leq \pi$ soll ungerade und 2π-periodisch fortgesetzt werden. Wie lautet die dieser Funktion zugeordnete Fourierreihe?

Aufgaben zum Kapitel 8

Aufgabe 1: Man berechne die Fourier-Transformierte der Funktion

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ -1 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ e^{-t} & \text{für} \quad t_0 < t \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{für} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad |t| > 1 \end{cases}$

Aufgabe 2: Die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{a}{2} \\ 0, & sonst \end{cases}$ soll berechnet werden.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte für folgende Funktionen mittels der Definition!

a) Einheitssprungfunktion $\quad \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

b) Rampenfunktion $f(t) = t \cdot \sigma(t)$

c) Exponentialfunktion $f(t) = e^{at} \cdot \sigma(t)$ mit einer beliebigen komplexen Konstanten $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie durch Rücktransformation $f(t)$ aus den gegebenen $F(s)$!

a) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3}$ $\qquad$ b) $F(s) = \dfrac{6s^2 - 2s + 1}{s^3}$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ aus der Laplace-Transformierten $F(s)$.

a.) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 13}$ $\qquad$ b.) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2 + 6s + 13}$

Aufgabe 6: Man berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$!

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ aus der Laplace-Transformierten $F(s) = \dfrac{1 - e^{-3s}}{s^2}$!

Lösungen zum Kapitel 5

1:a) $f_x = 2xlny + \dfrac{y^2}{x} + y \qquad f_y = \dfrac{x^2}{y} + 2y\ln x + x$

$f_{xx} = 2\ln y - \dfrac{y^2}{x^2} \qquad f_{xy} = \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} + 1 \qquad f_{yy} = -\dfrac{x^2}{y^2} + 2\ln x$

b) $f_x = e^{x+y^2} \cdot x^2 + 2e^{x+y^2} \cdot x + \dfrac{2}{x}, \quad f_y = e^{x+y^2}x^2 \cdot 2y + 1$

$f_{xx} = e^{x+y^2}(x^2 + 4x + 2) - \dfrac{2}{x^2},\ f_{yy} = 2x^2\left(e^{x+y^2} \cdot 2y^2 + e^{x+y^2}\right),\ f_{xy} = e^{x+y^2}(x^2 2y + 4xy)$

c) $f_x = 3(x+7)^2(y+1)^2 \qquad f_y = (x+7)^3 \cdot 2(y+1)$

$f_{xx} = 6(x+7)(y+1)^2 \qquad f_{xy} = 6(x+7)^2(y+1) \qquad f_{yy} = (x+7)^3 \cdot 2$

d) $f_x = y^{-2} + 4x^3e^y \qquad f_y = -2xy^{-3} + x^4e^y$

$f_{xx} = 12x^2e^y \qquad f_{xy} = -2y^{-3} + 4x^3e^y \qquad f_{yy} = 6xy^{-4} + x^4e^y$

e) $f_x = 3x^2yz^2 + 4xy^2z$ $\quad f_y = x^3z^2 + 4x^2yz$ $\quad f_z = 2x^3yz + 2x^2y^2 + 15z^2$

$f_{xx} = 6xyz^2 + 4y^2z$ $\quad f_{yy} = 4x^2z$ $\quad f_{zz} = 2x^3y + 30z$

f) $f_x = -\dfrac{x}{\sqrt{y-x^2}}$ $\quad f_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y-x^2}}$

$$f_{xx} = -\frac{\sqrt{y-x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{y-x^2}}}{y-x^2} \qquad f_{xy} = \frac{x}{2}(y-x^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad f_{yy} = -\frac{1}{4}(y-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

g) $f_x = 1 + yx^{-2}$ $\quad f_y = -x^{-1}$

$f_{xx} = -2yx^{-3}$ $\quad f_{xy} = x^{-2}$ $\quad f_{yy} = 0$

h) $f_x = 2(1 + x^2 - 2y^2)2x$ $\quad f_y = 2(1 + x^2 - 2y^2)(-4y)$

$f_{xx} = 4(1 + 3x^2 - 2y^2)$ $\quad f_{yy} = -8(1 + x^2 - 2y^2) + (-8y) \cdot (-4y)$ $\quad f_{xy} = 4x \cdot (-4y)$

2: a) $dz = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{1}{2x}\right)dx - \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - \frac{1}{2y}\right)dy$

b) $du = (3x^2 + y^2)dx + (2xy + 2z^2)dy + 4yzdz$

c) $dz = 2x\cos(x^2 + y^2)dx + 2y\cos(x^2 + y^2)dy$

3: $|\Delta R| \approx \frac{11}{16}\Omega < 0,7\Omega$, $\quad R^* = (112,5 \pm 0,7)\Omega$, $\quad |\delta R| = \left|\frac{\Delta R}{R}\right| \le \frac{0,7}{112} < 0,007 = 0,7\%$

4: a) $\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = \dfrac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}(P_0) = 0,99$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = \dfrac{y\cos\alpha + x\sin\alpha}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}(P_0) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} = 0,183$

5: $\dfrac{\partial T}{\partial s}\Big|_{P_0,\vec{s}} = gradT|_{P_0} \cdot \vec{e}_s = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,[TE/LE]$

6: a) Max. bei $P_1(0;0)$ mit $z_{\max} = 1$, Min. bei $P_2(0;2)$ mit $z_{\min} = -15$,

Sattelpunkte bei $P_3(2;1)$, $P_4(-2;1)$

b) Stationäre Punkte: $(0;y)$ mit y beliebig und $(x;0)$ mit x beliebig sowie $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

Rel. Maximum bei $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ mit $z_0 = \frac{1}{432}$. Bei den anderen ist $D = 0$ (nicht entscheidbar).

7: a) $(3;2)$ ist ein rel. Minimum $\quad$ b) $\left(\pm\sqrt{2};-3\right)$ sind rel. Minima

8: Bei a) und b) hat der Quader eine quadratische Grundfläche ($a = b = 2,71m$) und eine Höhe von $1,30m$.

9: $\int\limits_{y=0}^{1}\int\limits_{x=y}^{y+2}(x+y)dxdy = 4$ **10:** $V = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{y^2}^{3-2y^2} xy^2dx\right)dy = \frac{36}{35}$ $[VE]$

11:

$J_y = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a\sqrt{2}}(a+r\cos\varphi)^2 rdrd\varphi = 3\pi a^4,\quad J_x = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a\sqrt{2}}(b+r\sin\varphi)^2 rdrd\varphi = \pi a^2(a^2+2b^2)$

12: $A = 16,\quad x_S = \frac{97}{16},\quad y_S = \frac{7}{8}$

13: $\Phi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R} B_0e^{-r}rdrd\varphi = 2\pi B_0[1-(R+1)e^{-R}]$

Lösungen zum Kapitel 6

1: a) $y = 2+ce^{-x}$ b) $y = \tan\frac{x^4+c}{2}$ **2:** $3x^2-2x-4y^2 = 1$

3: $y(x) = c(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^4$ **4:** a) $y = c_1e^{3x}+c_2e^{-5x}$ b) $y(x) = \frac{1}{3}+xe^{-x}$

5: a) $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$ b) $y(x) = e^{-\cos x}$

6: a) $y = Cx$ b) $y = \pm\sqrt{2e^x+C}$

c) $y = C(x-a)+b$ d) $y = \frac{Cx}{1+x}$ e) $y = 2+Ce^{\frac{x^2}{2}}$

7:a) $y = A\cos x+B\sin x$ b) $y = \frac{e^x}{2}-C_1e^{-x}+C_2$ c) $y = C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$

d) $y = e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$ e) $y = 3e^{-x}-e^{-4x}$ f) $y = A\cos x+B\sin x+x^2-2$

g) $y = C_1e^x+C_2e^{2x}-0,05\cos 2x-0,15\sin 2x$ h) $y = 4\cos x-2\pi\sin x-x^2-4$

Lösungen zum Kapitel 7

1: a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ Konv. b) $a_k = \frac{4}{2k^3+1} < \frac{2}{k^3} \Rightarrow$ Konv.

2: a) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3}\frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3} \Rightarrow$ absolute Konvergenz

b) $|a_n| > |a_{n+1}| \wedge \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow$ Konvergenz (Leibniz-Kriterium)

3: Konvergenzintervall: a) $-1 \le x \le 1$ b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

4: $\ln x = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}$, Konvergenzintervall : $0 < x \le 2$

5: a) $\sin\frac{x}{2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$ für alle x konvergent

b) $2^x = e^{x\ln 2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n$ konvergent für alle x.

6: gerade Funktion $\Rightarrow b_\nu = 0$ für alle $\nu \in N$.

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \qquad a_\nu = \frac{4(-1)^\nu}{\nu^2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\cos\nu x$$

7: Definition : $f^{(u)}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad 0 < x \le \pi \\ -1 & \textit{für} \quad -\pi < x \le 0 \end{cases}$

$$a_\nu = 0 \text{ für alle } \nu = 0, 1, \ldots, \qquad b_\nu = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad \nu = 2, 4, 6, \ldots \\ \frac{4}{\pi\nu} & \textit{für} \quad \nu = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(u)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad (x \neq \pm k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Lösungen zum Kapitel 8

1: a) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega t_0} - 1) + \frac{1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t_0}$ b) $F(\omega) = \frac{4}{\omega^3}(\sin\omega - \omega\cos\omega)$

2: Setzt man $f(t)$ direkt in die Definition der Fourier-Transformierten ein, folgt

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\omega a/2} - e^{-j\omega a/2}}{2j} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right).$$

3: a) $F(s) = \int_0^T e^{-st}dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$

$\lim_{T\to\infty} |e^{-sT}| = 0$, falls $\operatorname{Re} s > 0$ ist. $\Rightarrow \pounds\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$ für alle s mit $\operatorname{Re} s > 0$.

b) $\pounds\left\{t\,\sigma(t)\right\} = \frac{1}{s^2}$ für $\operatorname{Re} s > 0$

c) $\pounds\left\{e^{at}\,\sigma(t)\right\} = \frac{1}{s-a}$ für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

$a = j\omega_0, \omega_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \pounds\left\{e^{j\omega_0 t}\,\sigma(t)\right\} = \frac{1}{s - j\omega_0}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$

4: a.) $f(t) = \left(\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)\right)\sigma(t)$ b.) $f(t) = \left(6 - 2t + \frac{1}{2}t^2\right)\sigma(t)$

5: a.) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin(2t)\sigma(t)$ b.) $f(t) = e^{-3t}(\cos(2t) + \sin(2t))\sigma(t)$

6: $F(s) = \frac{1}{(b-a)(s-b)} - \frac{1}{(b-a)(s-a)} = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$

7: $f(t) = t \cdot \sigma(t) - (t-3) \cdot \sigma(t-3) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ t & \text{für} \quad 0 \le t < 3 \\ 3 & \text{für} \quad 3 \le t \end{cases}$