4. Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

In der Geometrie, Physik und in anderen technischen Gebieten berechnen sich viele Größen als Produkt von zwei anderen.

Diese Formeln lassen sich aber in dieser Einfachheit **nicht** verwenden, wenn die beiden Eingangsgrößen voneinander abhängen. Ist also beispielsweise in

$$s(t) = v(t) \cdot t$$

die Geschwindigkeit selbst in der Zeit veränderlich, so kann man sich folgendermaßen behelfen. Man zerteilt das gesamte (interessierende) Zeitintervall $[0, T]$ in viele kleine Intervalle der Längen Δt, in denen man dann $v = v_i$ näherungsweise als konstant ansehen kann, summiert auf und erwartet:

$$s(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t$$

Diese Grundidee führt zum Begriff des **bestimmten Integrals**. Bevor wir jedoch diesen Gedanken weiter verfolgen, wollen wir zunächst die Rechengesetze bereitstellen, die es ermöglichen, dann auch solche bestimmten Integrale zu berechnen.

4.1 Das unbestimmte Integral

4.1.1 Begriffe

Eine Funktion $F(x)$ bezeichnet man als **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Die Menge aller Stammfunktionen bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** der Funktion:

$\int f(x)dx = \{F(x) / F'(x) = f(x)\}$

Kurzschreibweise: $\int f(x)dx = F(x) + C,$ weil sich offensichtlich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

4.1.2 Integrationsmethoden

Da es sich beim Integrieren um eine Umkehroperation des Differenzierens handelt, leiten sich die Regeln im wesentlichen aus den Differentiationsregeln ab.

Zunächst benötigt man wieder ein Grundrepertoir an Funktionen und ihren Stammfunktionen. Da man ein solches in jeder Formelsammlung (allerdings in sehr unterschiedlichen Umfängen) findet, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Wir kommen jetzt zu den verschiedenen Regeln.

1. Linearität

$$\boxed{\int[\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx}$$

2. Partielle Integration

Diese Methode basiert auf der Produktregel der Differentiation:

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx}$$

3. Substitutionsmethode

Hier liegt die Kettenregel zugrunde.

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)dx \end{aligned}$$

Nach der Integration muss dann wieder u durch $g(x)$ ersetzt werden.

Merke: Eine Substitution kann nur dann zum Ziel führen, wenn die Integrationsvariable x vollständig (also auch in dx) durch die neue Variable (z.B. t oder u) ersetzt wird!

4. Integration gebrochener rationaler Funktionen

Ist $f(x)$ eine unecht gebrochene rationale Funktion (Zählergrad ≥ Nennergrad), so zerlegt man diese zunächst mittels Polynomdivision in eine ganze rationale und eine echt gebrochene rationale Funktion.

Die Integration des ganzen Anteils bereitet keine Probleme. Der echt gebrochene Anteil muss dann (wenn kein Spezialfall vorliegt) in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden (siehe Kapitel 3).

Die unbestimmten Integrale der 3 wichtigsten Partialbrüche ergeben sich wie folgt:

1. Typ: $$\boxed{\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C}$$

Kontrolle:

$$(A \cdot \ln|x-a| + C)' = \begin{cases} (A \cdot \ln(x-a) + C)' & \text{für } x > a \\ (A \cdot \ln(a-x) + C)' & \text{für } x < a \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{x-a} \\ \dfrac{-A}{a-x} \end{cases} = \frac{A}{x-a}, \ x \neq a$$

2. Typ: $$\boxed{\int \frac{B}{(x-b)^m}dx = \frac{B}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-b)^{m-1}} + C = -\frac{B}{(m-1) \cdot (x-b)^{m-1}} + C}\ , \ m > 1$$

Kontrolle:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{B \cdot (x-b)^{-(m-1)}}{(m-1)} + C\right) = B \cdot (x-b)^{-m+1-1} = \frac{B}{(x-b)^m}$$

3. Typ: $\boxed{\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2} \cdot \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C}$

Dabei ist $4q - p^2 > 0$, da wir ja von einem komplexen Nullstellenpaar ausgehen.

Kontrolle:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{2} \cdot \ln|x^2+px+q|\right) = \frac{A}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C\right) = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{(2B-Ap)}{4q-p^2} \cdot \frac{2}{1+\frac{(2x+p)^2}{4q-p^2}} = \frac{2(2B-Ap)}{4q-p^2+4x^2+4px+p^2} = \frac{4B-2Ap}{4x^2+4px+4q}$$

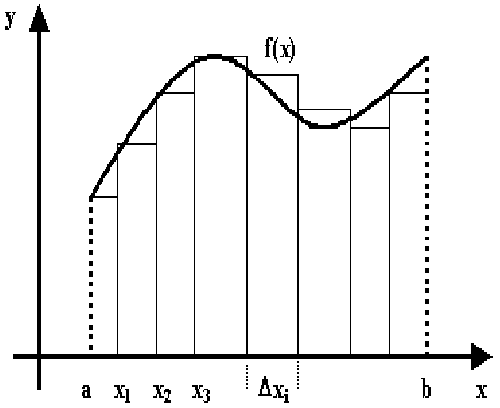
Zusammenfassung: $\frac{A}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{2B-Ap}{2(x^2+px+q)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

4.1.3 Gemischte Integrationsbeispiele

4.2 Das bestimmte Integral

4.2.1 Definition

Um die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ (der ganz über der x-Achse liegen soll) und der x-Achse im Intervall $[a,b]$ zu ermitteln, zerlegen wir das Intervall in N Teilintervalle der Längen Δx_i und nähern in jedem Teilintervall die Fläche durch eine Rechteckfläche an (siehe Bild).

Bild 4.1: 

Unter bestimmten Voraussetzungen (die in der Praxis fast alle Funktionen erfüllen) kann man sich davon überzeugen, dass sich die Fläche tatsächlich als Grenzwert

$$A = \lim_{\substack{\max_i \Delta t_i \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

berechnen lässt.

Man schreibt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\substack{\max_i \Delta t_i \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

und nennt diesen Zahlenwert das **bestimmte Integral der Funktion** $f(x)$ **in den Grenzen von a bis b**.

Die Variable x heißt in diesem Zusammenhang **Integrationsvariable**, $f(x)$ heißt **Integrand** und a bzw. b nennt man die **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

4.2.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. Das Ergebnis der Integration ist eine reelle Zahl (bei praktischen Beispielen mit einer Maßeinheit behaftet), die nicht davon abhängt, welchen Buchstaben man für die Integrationsvariable gewählt hat.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt \quad \text{usw.}$$

2. Das so definierte bestimmte Integral wird in der Literatur häufig als **Riemannsches Integral** bezeichnet. Dies dient der Unterscheidung verschiedener Integralbegriffe.

3. Stetige Funktionen sind auf jeden Fall **integrierbar**, d.h. der oben definierte Grenzwert existiert. Darüber hinaus können aber auch unstetige Funktionen (z.B. solche mit einer Lücke oder einem endlichen Sprung) integrierbar sein.

4. Aus der Definition ergibt sich unmittelbar die Beziehung

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \ ,$$

wenn die Integrale existieren. ($a \le b \le c$)

4. Die ”normale” Integrationsrichtung ist von links nach rechts, d.h. in der Definition ist $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Praktisch kann aber auch die umgekehrte Richtung von Bedeutung sein. Dann ist Δx durch $-\Delta x$ zu ersetzen und man erhält

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6. Bei Integration von links nach rechts erhält man offensichtlich

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \text{ , falls } f(x) > 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ ist und}$$

$$\int_a^b f(x)dx < 0 \text{ , falls } f(x) < 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ ist.}$$

Hat die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ die einzige (einfache) Nullstelle c, so ergibt sich die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse nicht mehr zu

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

sondern zu

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = |\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx|.$$

7. Vernünftigerweise setzt man

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

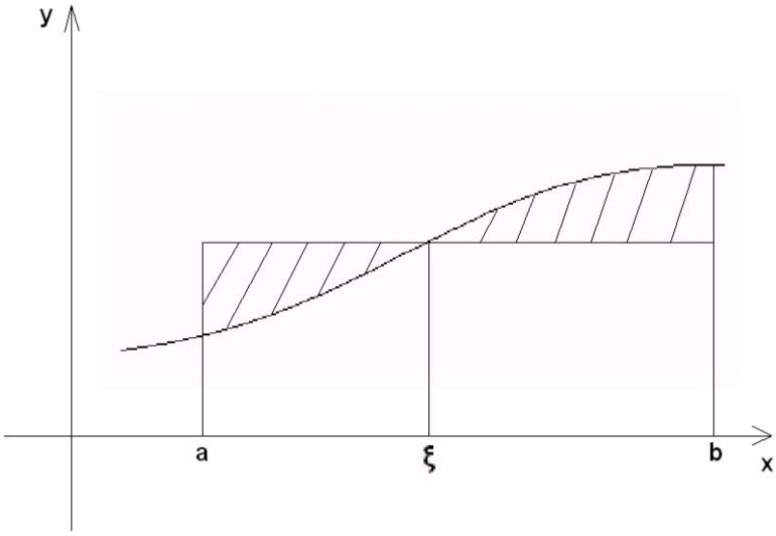
8. Die Dreiecksungleichung für Summen überträgt sich unter bestimmten Voraussetzungen auch auf Integrale:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

9. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(\xi) \ , \ a < x < b \ ,$$

lässt sich vereinfacht geometrisch so interpretieren, dass sich für jede Kurve die zwischen ihr und der x-Achse befindliche Fläche durch die Fläche eines geeigneten Rechtecks mit den Seitenlängen $(b-a)$ und $f(\xi)$ ersetzen lässt.



$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ wird als **Integralmittelwert** der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Die Stelle ξ braucht man dazu nicht zu kennen. Der Integralmittelwert kommt zum Beispiel in der Elektrotechnik als Gleichrichtwert

$$I_g = \int_0^p i(t)dt$$

eines gleichgerichteten Wechselstroms $i(t)$ mit der Periode p zur Anwendung.

4.2.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Behauptung: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = F(b) - F(a)$ mit $F'(x) = f(x)$.

Beweis: *Mit $b = x_N$ und $a = x_1$ gilt für jedes N.*

$$F(b) - F(a) = \underbrace{F(x_N) - F(x_{N-1})} + \underbrace{F(x_{N-1}) - F(x_{N-2})} + \ldots + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}$$

$\Rightarrow$ *Nach dem MWS der Differentialrechnung für jedes N*

$$F(b) - F(a) = f(\xi_{N-1})\Delta x_{N-1} + f(\xi_{N-2})\Delta x_{N-2} + \ldots + f(\xi_1)\Delta x_1$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Das ist die Aussage des **Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung**.

Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ in den Grenzen von a bis b berechnet sich als Differenz der Werte einer Stammfunktion $F(x)$ an der oberen und unteren Grenze (vorausgesetzt, dass $f(x)$ eine Stammfunktion besitzt):

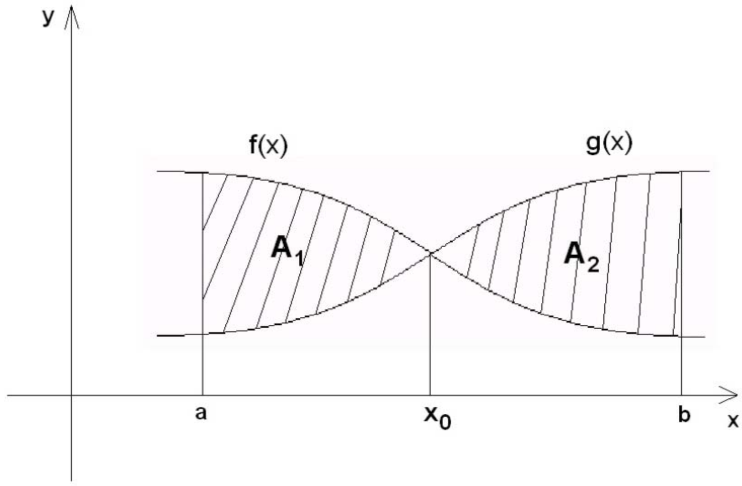
$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Im Modul "Numerische Mathematik" werden Näherungsverfahren behandelt, die auch in solchen Fällen zum Ziel führen.

4.3 Anwendungen des bestimmten Integrals

4.3.1 Flächenberechnung

Wir können jetzt Flächeninhalte solcher Gebiete berechnen, die links und rechts durch Geraden $x = a$ und $x = b$ $(a < b)$ begrenzt sind und zwischen zwei Kurven liegen, die durch die Gleichungen $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ gegeben sind (siehe Bild).

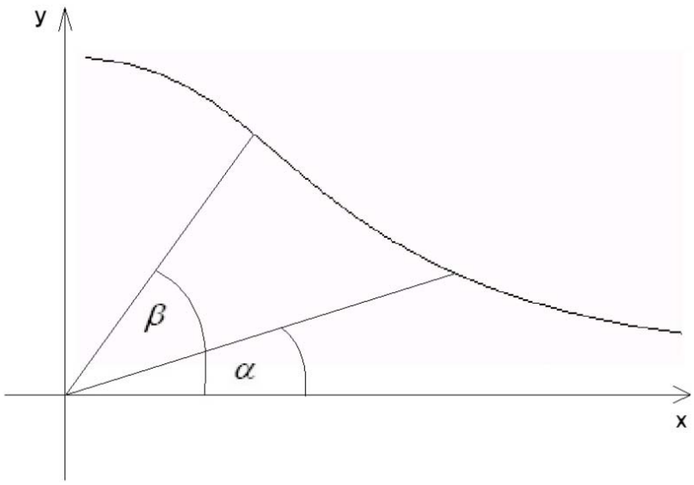


Man muss also zunächst die im Intervall (a, b) eventuell vorhandenen Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ ermitteln, kann dann die Teilflächen ermitteln und schließlich diese zur Gesamtfläche aufsummieren. Im Falle der Abbildung 4.3 ergibt sich

$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_a^{x_0} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{x_0}^{b} (f(x) - g(x))dx \right|$$

Flächeninhalte von so genannten **Sektorgebieten** (siehe Bild) lassen sich besonders gut berechnen, wenn die Kurve durch eine Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist. Man denkt sich das Gebiet in viele kleine Kreissektoren zerlegt, deren Flächen man aufsummiert.

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot b = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot d\varphi, \qquad (\varphi \text{ im Bogenmaß})$$



Summieren und Grenzübergang führt zur **Sektorflächenformel in Polarkoordinaten**:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi \right|}$$

Wir rechnen die Formel um, wenn die Kurve in einer Parameterdarstellung gegeben ist:

Für Polarkoordinaten gilt

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad dx = \cos\varphi \cdot dr - r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad dy = \sin\varphi \cdot dr + r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

Für eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gilt

$$dx = \dot{x} \cdot dt \Rightarrow y \cdot \dot{x} \cdot dt = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot dr - r^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot d\varphi$$
$$dy = \dot{y} \cdot dt \Rightarrow x \cdot \dot{y} \cdot dt = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot dr + r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi$$

Subtrahiert man die erste von der zweiten Gleichung, so erhält man die Beziehung

$$\left(x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x} \right) \cdot dt = r^2 \cdot d\varphi$$

Somit erhalten wir die **Sektorformel für eine Parameterdarstellung**:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} \left(x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x} \right) \cdot dt \right|}$$

4.3.2 Bogenlänge

Da wir im Abschnitt 3.6 das Bogendifferential *ds* definiert und Formeln dafür hergeleitet hatten, fällt uns jetzt die Bestimmung der Länge eines Kurvenstückes (Bogenlänge) nicht schwer:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Damit ergibt sich

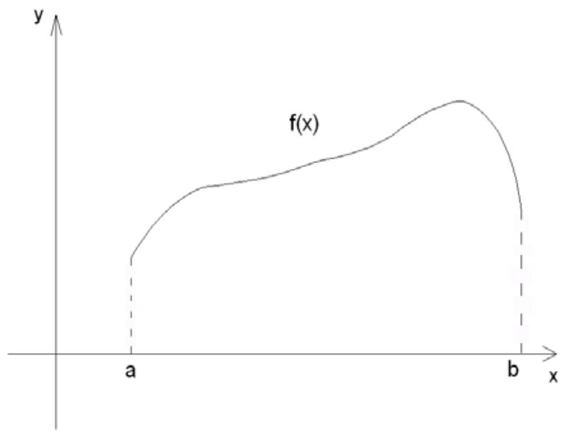
a) in kartesischen Koordinaten: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

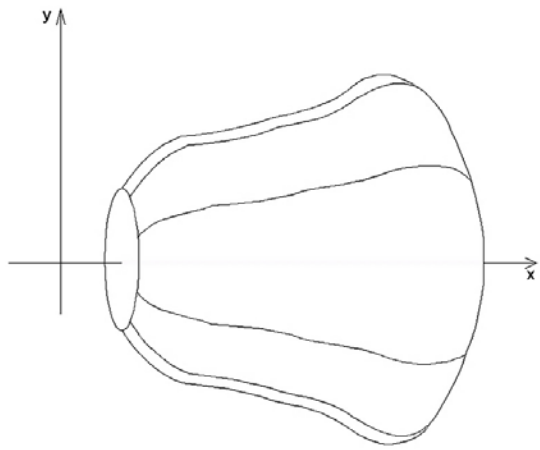
b) für eine Parameterdarstellung: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt$

c) in Polarkoordinaten: $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$

4.3.3 Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern

Wir untersuchen jetzt Körper, die entstehen, wenn man eine Kurve (begrenzt auf ein Intervall $[a, b]$) **um die** x**-Achse rotieren** lässt:

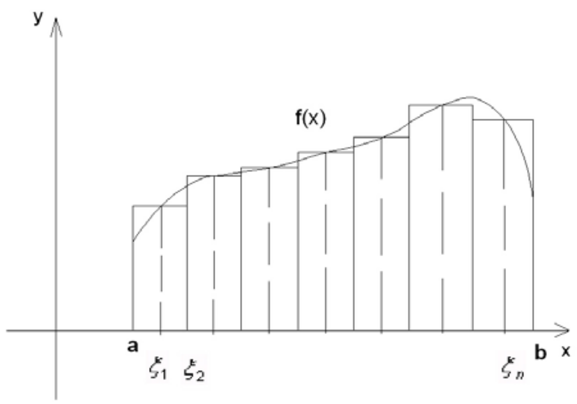


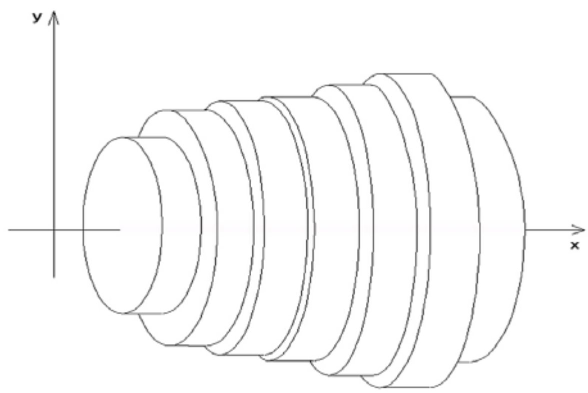


Zerlegt man das Intervall wie bei der Definition des bestimmten Integrals in viele kleine Teilintervalle der Länge Δx, so wird der Rotationskörper offensichtlich in entsprechende kleine Zylinder der Volumina zerlegt (siehe Bild 4.6).

$$V_i = \pi \cdot [f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta x$$

zerlegt (siehe Bild).



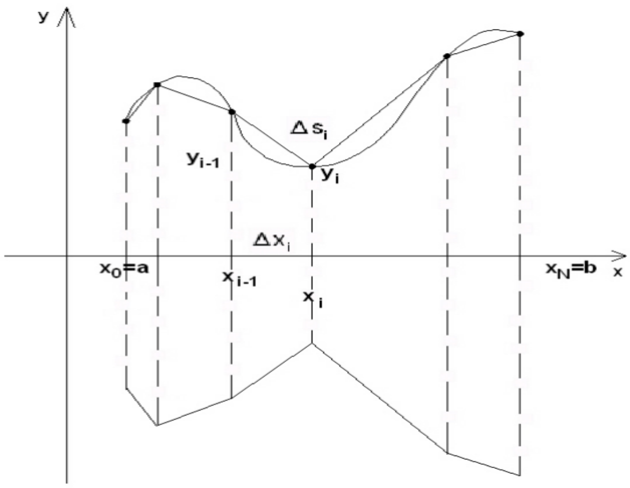


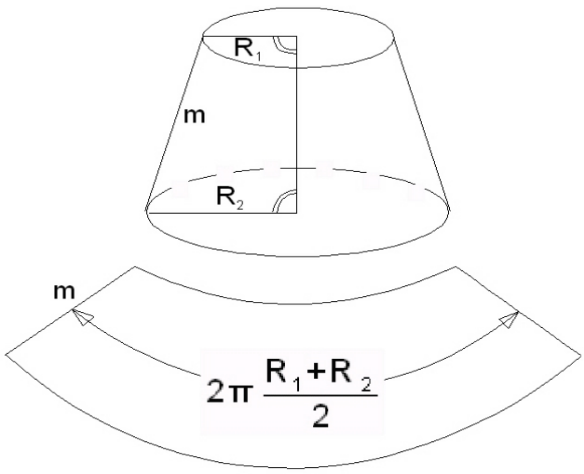
Damit kommen wir zu der folgenden Volumenformel: $\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx}$.

Zur Berechnung der **Mantelfläche** benutzt man das **Bogendifferential**; damit ersetzt man also die Kurve in kleinen Teilintervallen zunächst durch Sekantenstücken (siehe Bild). Es entstehen viele kleine Kegelstümpfe, deren Mantelflächen sich bekanntlich (siehe unteres Bild) nach der Formel

$$M_i = 2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot \Delta s_i$$

berechnen.





$$R_1 \triangleq y_i, R_2 \triangleq y_{i-1}, m \triangleq \Delta s_i$$

Durch Summieren und an schließenden Grenzübergang kommt man zur Formel für die Mantelfläche eines Rotationskörpers:

$$M_i = 2\pi \cdot \int_a^b [f(x)] ds$$

Wegen $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

erhält man schließlich

$$\boxed{M = 2\pi \cdot \int_a^b [f(x)] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Schlussbemerkung:

Weitere Anwendungen (Schwerpunktformeln) finden sich in der Formelsammlung und im Übungsbuch von Papula. Zu beachten ist, dass man mit dem bisherigen Integralbegriff nur sehr spezielle zwei bzw. dreidimensionale Gebilde (Normalbereiche, Rotationskörper) behandeln kann.

Wir werden später (im 2. Semester) Zwei- und Dreifachintegrale kennen lernen, mit deren Hilfe man allgemeinere Gebiete berechnen kann.

4.4 Uneigentliche Integrale

Die Frage nach der Fläche unter einer Kurve kann auch sinnvoll sein, wenn

a) kein endliches Intervall $[a,b]$ sondern ein unendliches Intervall $(-\infty,a]$, $[a,\infty)$ oder $(-\infty,\infty)$

oder

b) eine in $[a,b]$ nicht beschränkte Funktion vorliegt.

4.4.1 Integrale über unbeschränkte Intervalle

Wenn $f(x)$ in jedem Teilintervall von $[a,\infty)$ integrierbar ist und der Grenzwert

$$I = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

existiert, so schreibt man

$$I = \int_a^\infty f(x)dx$$

und nennt diesen Grenzwert das **uneigentliche Integral** der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von a bis ∞. Auch wenn der Grenzwert nicht existiert, verwendet man diese Symbolik; man sagt dann, dass das Integral **divergiert**. (Im Gegensatz dazu spricht man von einem **konvergenten** Integral, wenn der Grenzwert existiert.)

Analog definiert man

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^a f(x)dx$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^a f(x)dx + \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx = \lim_{u\to\infty}\left(\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^u f(x)dx\right) .$$

Achtung: Falsch wäre $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t f(x)dx$,wenngleich auch dieser Grenzwert durchaus eine praktische Bedeutung haben kann (**Cauchyscher Hauptwert** des uneigentlichen Integrals).

4.4.2 Integrale über unbeschränkte Funktionen

Jetzt betrachten wir eine Funktion $f(x)$, die im Intervall $[a,b]$ an der Stelle c ($a < c < b$) eine Polstelle besitzt, ansonsten aber stetig ist. Auch in diesem Falle spricht man bei dem Ausdruck $\int_a^b f(x)dx$ von einem **uneigentlichen Integral**, das man für den Fall, dass die Grenzwerte

$$\lim_{t\to+0} \int_a^{c-t} f(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{u\to+0} \int_{c+u}^{b} f(x)dx$$

existieren als **konvergent** und sonst als **divergent** bezeichnet.

Im Falle der Konvergenz vereinbart man dann sinnvollerweise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to+0} \int_a^{c-t} f(x)dx + \lim_{u\to+0} \int_{c+u}^{b} f(x)dx$$

Auch hier ist wieder zu beachten, dass der Grenzwert

$$\lim_{t\to+0} \left(\int_a^{c-t} f(x)dx + \int_{c+t}^{b} f(x)dx \right)$$

oft existiert, ohne dass das uneigentliche Integral konvergent ist. Dieser spezielle Grenzwert wird ebenfalls als **(Cauchyscher) Hauptwert** des uneigentlichen Integrals bezeichnet:

$$V.\ p. \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to+0} \left(\int_a^{c-t} f(x)dx + \int_{c+t}^{b} f(x)dx \right)$$

(V. p. ist die Abkürzung von valeur principal = Hauptwert.)