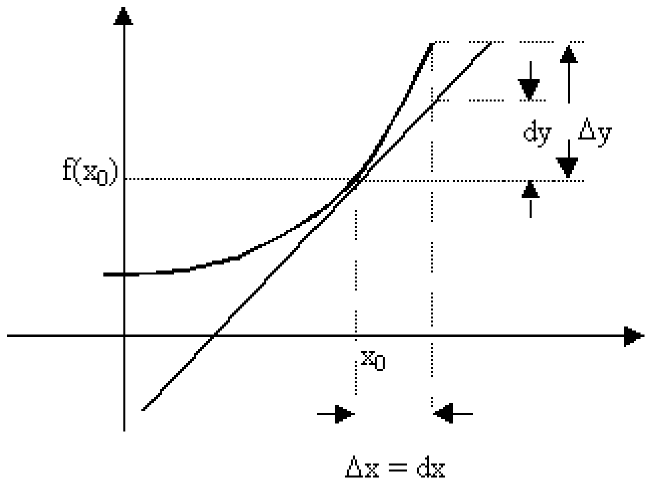
3. Differentialrechnung

3.1 Grundbegriffe und Differentiationsregeln

3.1.1 Ableitung und Differential

Aus der folgenden Abbildung ergeben sich diese beiden wichtigen Begriffe.



$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

wird als **1. Ableitung** bzw. **Differentialquotient** der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x bezeichnet.

Das **Differential** der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x zum Zuwachs dx ist demzufolge

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx \text{ bzw. } dy = f'(x) \cdot \Delta x}.$$

Für die wichtigsten Grundfunktionen muss man sich die 1. Ableitung nach der obigen Grenzwertdefinition herleiten. Dafür gibt es umfangreiche Tabellen. Für weitere zusammengesetzte Funktionen verwendet man dann neben den bekannten Ableitungen die folgenden Regeln, die aus der Schule bekannt sein müssten.

3.1.2 Differentiationsregeln

Faktorregel: $\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)}$

Summenregel: $\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)}$

Produktregel: $\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

Quotientenregel: $\boxed{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}}$

Kettenregel: $\boxed{[f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x) \text{ mit } u = g(x)}$

In anderer Schreibweise: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}}$

3.2 Lokale Extremwerte und Wendepunkte

Es sei $y = f(x)$ eine in ihrem Definitionsbereich hinreichend oft differenzierbare Funktion.

Bei $x_{\min} \in D_f$ liegt ein **lokales (relatives) Minimum** vor, wenn $f(x)$ in einem Intervall $(a, x_{\min}]$ monoton fallend und in einem Intervall $[x_{\min}, b)$ monoton steigend ist.

Bei $x_{\max} \in D_f$ liegt ein **lokales (relatives) Maximum** vor, wenn $f(x)$ in einem Intervall $(a, x_{\max}]$ monoton steigend und in einem Intervall $[x_{\max}, b)$ monoton fallend ist.

Von einem **Wendepunkt** x_w spricht man, wenn $f(x)$ in einem Intervall $(a, x_w]$ konvex (bzw. konkav) und in einem Intervall $[x_w, b)$ konkav (bzw. konvex) ist.

Aus der geometrischen Bedeutung der 1. und 2. Ableitung einer Funktion ergibt sich anschaulich der folgende Sachverhalt.

Ist für ein $x_0 \in D_f$

$$\boxed{y'(x_0) = 0 \qquad \textbf{und} \qquad y''(x_0) \neq 0},$$

so hat die Funktion an dieser Stelle ein lokales (relatives) Extremum. Für $y''(x_0) < 0$ ist es ein Maximum, für $y''(x_0) > 0$ ein Minimum.

Ist $y''(x_0) = 0,\ y'''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(k)}(x_0) = 0$ und $y^{(k+1)}(x_0) \neq 0$, so handelt es sich um

- ein lokales Extremum, wenn $k + 1$ **gerade** ist;

- einen Horizontalwendepunkt, wenn $k + 1$ **ungerade** ist.

Für einen Wendepunkt x_w ist die Bedingung $f''(x) = 0$ notwendig. Hinreichende Bedingungen braucht man in der Regel nicht zu untersuchen, da die Existenz des Wendepunktes meist schon aus anderen Untersuchungen hervorgeht.

Mit Hilfe von relativen Extrema und Wendepunkten kann man die im Kapitel 3 begonnene Beschreibung von Graphen (**Kurvendiskussion**) vervollständigen.

3.3 Fehlerrechnung

Bei physikalischen Versuchen wird häufig eine Größe x gemessen (mit einem Meßfehler Δx) und daraus über ein bekanntes physikalisches Gesetz

$$\boxed{y = f(x)}$$

eine andere Größe y ermittelt.

Δx heißt **absoluter Fehler der Eingangsgröße** x.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ heißt **absoluter Fehler der Ausgangsgröße** y.

Manchmal werden unter Δx und Δy auch die Beträge der obigen Größen verstanden.

$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$ heißt **relativer Fehler** von x, und entsprechend ist

$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$ der relative Fehler von y.

Der relative Fehler einer Größe wird meistens in % angegeben.

In diesem Zusammenhang wird der Unterschied zwischen Δy und dy in der Regel völlig vernachlässigt, weil man davon ausgeht, dass der Messfehler Δx hinreichend klein ist.

In diesem Sinne sind dann die Gleichungen

$$\boxed{\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x}$$

bzw.

$$\boxed{\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \cdot \delta x}$$

zu verstehen.

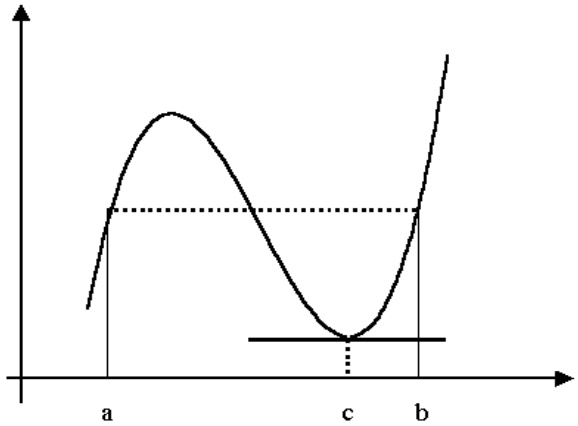
3.4 Mittelwertsätze

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle differenzierbar ist, so ist sie dort auch stetig. (Sonst könnte man ja keine Tangente anlegen.)

3.4.1 Satz von Rolle

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$ gilt, dann gibt es mindestens eine Stelle c im Intervall $(a < c < b)$, an der $f\,'(c) = 0$ gilt.

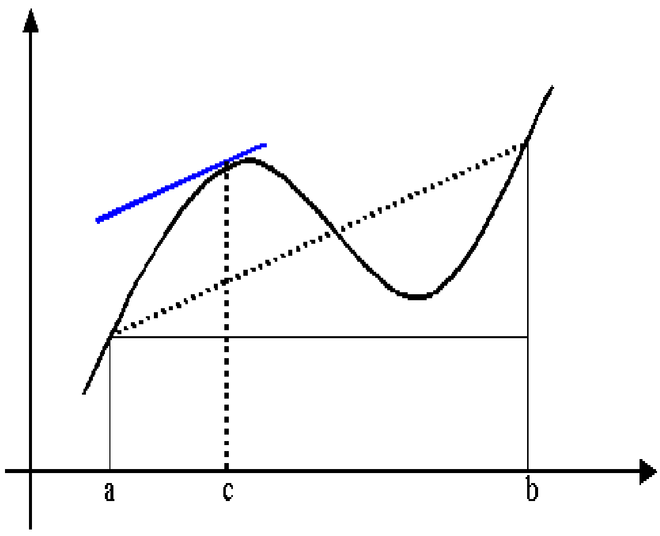
Die Erklärung liefert das Bild:



3.4.2 Erster Mittelwertsatz

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist, dann gibt es mindestens eine Stelle c im Intervall $(a < c < b)$, an der $f\,'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt.

Die Erklärung liefert das Bild:



3.4.3. Zweiter Mittelwertsatz

Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a,b]$ differenzierbar sind und wenn $g'(x) \neq 0$ in (a,b) ist, dann gibt es im Intervall eine Stelle c $(a < c < b)$, an der

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

gilt.

<u>Erklärung:</u> *Zunächst kann der Nenner $g(b)-g(a)$ nicht Null sein, da sonst nach dem Satz von Rolle g' an irgendeiner Stelle im Intervall gleich 0 sein müsste. Dann wendet man auf die Hilfsfunktion*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [g(x)-g(a)]$$

den Satz von Rolle an. Also muss es eine Stelle c im Intervall geben, an der $F'(c) = 0$ gilt:

$$f'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x) \Rightarrow F'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.5 Linearisierung und Taylorsche Formel

3.5.1 Tangentengleichung

Nicht immer interessiert sich der Praktiker für das Verhalten einer Funktion im gesamten Definitionsbereich. Häufig will man bei komplizierten Funktionen lediglich den ungefähren Verlauf in der unmittelbaren Nähe einer vorgegebenen Stelle x_0 wissen.

Im einfachsten Falle ersetzt man zu diesem Zweck die Kurve durch eine Gerade - nämlich die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0. Man spricht von **Linearisierung der Funktion an der Stelle** x_0, weil ja die Tangente der Graph einer linearen Funktion $y_T(x) = ax + b$ ist. Diese lineare Funktion hat die Eigenschaft, dass an der Stelle x_0 sowohl ihr Funktionswert als auch ihr Ableitungswert (die Steigung) mit denen der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Daraus ermittelt man die Gleichung der Tangente:

$$f(x_0) = ax_0 + b \wedge f'(x_0) = a \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y_T(x) = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}.$$

3.5.2 Taylorsche Formel

Wenn durch die Linearisierung einer Funktion keine genügend große Genauigkeit zu erwarten ist, kann man die Annäherung auch durch eine quadratische Funktion, eine kubische Funktion oder allgemein durch ein Polynom n –ten Grades vornehmen, das die folgende Gestalt hat:

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x-x_0)^i}$$

.

Diese Polynomfunktion offensichtlich hat die Eigenschaft, dass an der Stelle x_0 nicht nur die Funktionswerte sondern auch die Werte der $1., 2., \ldots, n$ –ten Ableitungen mit denen der Ausgangsfunktion $f(x)$ übereinstimmen:

$f(x_0) = T_n(x_0)$

$f'(x_0) = T_n'(x_0)$

$f''(x_0) = T_n''(x_0)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0)$.

Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass die vorgegebene Funktion $y = f(x)$ genügend oft differenzierbar ist.

$T_n(x)$ wird als **Taylor-Polynom** n –ten Grades der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bezeichnet. x_0 heißt **Entwicklungsstelle** der Funktion.

Bemerkungen:
1. Für $n = 1$ ergibt sich - wie gehabt - die Gleichung der an der Stelle x_0 an die Kurve angelegten Tangente:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad .$$

2. Für $n \geq 2$ bezeichnet man den Graphen als **Schmiegeparabel** $n - ter$ Ordnung.

3. Den Unterschied zwischen der gegebenen Funktion $y = f(x)$ und dem Taylor-Polynom $n - ten$ Grades bezeichnet man als das **n-te Restglied**. Es hängt offenbar für jede Funktion von der Entwicklungsstelle x_0, vom jeweiligen x und vom Grad n ab:

$$R_{n;x_0}(x)$$

Damit erhält man die sogenannte **Taylorsche Formel**:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i + R_{n;x_0}(x)}$$

4. Ist speziell $x = 0$, so spricht man von der **Mac Laurin**schen Form der Taylorschen Formel.

5. Für $n = 1$ ergibt sich der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**.

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0), \qquad c \in (x, x_0) \text{ bzw. } c \in (x_0, x) \quad .$$

6. Das Restglied gibt offensichtlich an, wie gut (oder schlecht) die Funktion durch das Taylor-Polynom approximiert wird. Es gibt Funktionen, die im ganzen Definitionsbereich relativ gut durch Taylorpolynome beschrieben werden können, und es gibt andere, bei denen man nur in unmittelbarar Nähe der Entwicklungsstelle von einer Approximation reden kann. Für das Restglied gilt offensichtlich

$$R_{n;x_0}(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i$$

$$= f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \right].$$

Um hierfür eine übersichtliche Gestalt zu erzeugen, führt man eine Hilfsfunktion ein:

$$F(z) = f(x) - f(z) - f'(z) \cdot (x-z) - \frac{f''(z)}{2!} \cdot (x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n.$$

Für diese Funktion gilt offensichtlich $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_{n;x_0}(x)$ *und mit etwas Rechnung erkennt man auch* $F'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n$.

Auf $F(z)$ *und eine geeignete Funktion* $G(z)$ *wendet man jetzt auf das Intervall* $[x_0, x]$ *(analog kann man dies für das Intervall* $[x, x_0]$ *tun) den zweiten Mittelwertsatz an und erhält*

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{0 - R_{n;x_0}(x)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \text{ mit } x_0 < c < x$$

bzw.

$$R_{n;x_0}(x) = -\frac{F'(c)}{G'(c)} \cdot [G(x) - G(x_0)] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \cdot \frac{[G(x) - G(x_0)]}{G'(c)}.$$

Je nachdem wie man die Funktion $G(z)$ *wählt, kommt man nun zu unterschiedlichen Gestalten des Restgliedes. Am einprägsamsten ist die* ***Lagrangesche Form****, die man erhält, wenn man* $G(z) = (x-z)^{n+1}$ *wählt:*

$$G'(z) = -(n+1) \cdot (x-z)^n \Rightarrow \frac{[G(x) - G(x_0)]}{G'(c)} = \frac{0 - (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1) \cdot (x-c)^n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1) \cdot (x-c)^n}$$

$$\Rightarrow R_{n;x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \cdot \frac{[G(x) - G(x_0)]}{G'(c)}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1) \cdot (x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Also gilt: $\boxed{R_{n;x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}$, $\begin{matrix} x_0 < c < x, \text{ wenn } x_0 < x \\ x < c < x_0, \text{ wenn } x < x_0 \end{matrix}$

$\square$

3.6 Berechnung von Grenzwerten nach Bernoulli-de l‘ Hospital

Wenn man den Grenzwert eines Quotienten bestimmen muss, so bildet man zunächst probeweise den Grenzwert des Zählers und den des Nenners. Dabei entstehen häufig sogenannte unbestimmte Ausdrücke der Gestalt

$$\text{"}\frac{0}{0}\text{"} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Von Johann BERNOULLI (1667-1748) und Guillaume Francois Antoine de l’HOSPITAL (1661-1704) stammen die folgenden Regeln, die im wesentlichen auf dem Mittelwertsatz basieren.

1. Grenzwerte vom Typ "$\frac{0}{0}$"

$f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von x_0 definiert und genügend oft differenzierbar (demzufolge auch stetig) und es gelte $g'(x_0) \neq 0$.

Außerdem sei $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$.

(Es würde auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ genügen.)

Dann erhält man nach TAYLOR:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{g''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2}$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2}{g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{g''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2} \quad \textit{(wegen } f(x_0) = 0 \textit{ und } g(x_0) = 0\textit{)}$$

$$= \frac{f'(x_0) + \dfrac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) + \dfrac{g''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

also $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Die Aussage gilt auch für einseitige Grenzwerte.

Ebenfalls gilt unter geeigneten Voraussetzungen

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

denn

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Natürlich gilt auch $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

$\square$

2. Grenzwerte vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$"

Es gelten die analogen Regeln, allerdings ist ihr Nachweis schwieriger, deshalb wird hier darauf verzichtet:

Unter geeigneten Voraussetzunen an die Funktionen f und g folgt aus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ und $g'(x_0) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

bzw.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g'(x) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \; .$$

3. Andere unbestimmte Ausdrücke

Oft können auch andere unbestimmte Ausdrücke - wie z.B. "0^0", "∞^0", "0^∞", "$0 \cdot \infty$" oder "$\infty - \infty$" usw. - nach geschickten Umformungen in eine der oben behandelten Formen gebracht werden, um so den Grenzwert zu ermitteln.

3.7 Differentielle Untersuchungen für ebene Kurven

Wie wir bereits früher gesehen haben, können Kurven

- durch eine explizite Gleichung $y = f(x)$
- durch eine implizite Gleichung $F(x,y) = 0$
- durch eine Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t)$
- in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$

gegeben sein.

Wir wollen jetzt einige wichtige Begriffe, die mit den 1. und 2. Ableitungen einer Funktion zusammenhängen, zusammenstellen und für die unterschiedlichen Darstellungsweisen einer Kurve untersuchen.

a) Anstieg und Tangente einer Kurve in einem Punkt

Ist die Kurve durch die **explizite Gleichung** $y = f(x)$ gegeben, sind die Sachverhalte bereits bekannt.

Im Punkt $(x_0; y_0)$ hat die Kurve den Anstieg $\boxed{\tan\alpha_0 = f'(x_0)}$

und die Tangente $\boxed{y_T(x) = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$.

Bei der **impliziten Darstellung** wird $\tan\alpha_0 = f'(x_0)$ ermittelt, indem die Gleichung $F(x,y) = 0$ mittels der Kettenregel differenziert wird und anschließend durch Einsetzen von x_0 der dazugehörige Wert $y'(x_0) = f'(x_0)$ berechnet wird.

Aus der **Parameterdarstellung** $\boxed{x = x(t),\ y = y(t)}$ ergibt sich wegen

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$ der Anstieg $$\boxed{\tan\alpha_0 = \frac{\dot{y}\,(t_0)}{\dot{x}\,(t_0)}}\;.$$

In **Polarkoordinaten** gilt $x = r \cdot \cos\varphi,\; y = r \cdot \sin\varphi$ und somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi}.$$ (Dabei bedeutet r' die Ableitung nach φ.)

Also ist der Anstieg durch $\boxed{\tan\alpha_0 = \frac{r'(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0 + r(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0}{r'(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0 - r(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0}}$ gegeben.

b) Normale einer Kurve in einem Punkt

Als Normale der Kurve im Punkt $(x_0;y_0)$ bezeichnet man die Gerade, die senkrecht zur Tangente steht.
Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\boxed{y_N(x) = y_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0)}\;.$$

Bekanntlich stehen ja zwei Geraden senkrecht zueinander, wenn das Produkt ihrer Anstiege -1 ergibt:

$$\tan(\alpha + 90°) = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Liegt Parameterdarstellung vor, so erhält man

$$\boxed{y_N(x) = y(t_0) - \frac{\dot{x}\,(t_0)}{\dot{y}\,(t_0)} \cdot [x - x(t_0)]}\;.$$

Analog erhält man in Polarkoordinaten

$$y_N(x) = y(\varphi_0) - \frac{r'(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0 - r(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0}{r'(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0 + r(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0} \cdot [x - x(\varphi_0)].$$

c) Bogendifferential in einem Punkt der Kurve

Es ist das Tangentenstück, das dem Zuwachs dx bzw. dt bzw. $d\varphi$ entspricht. man erhält

- für die explizite Form: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$

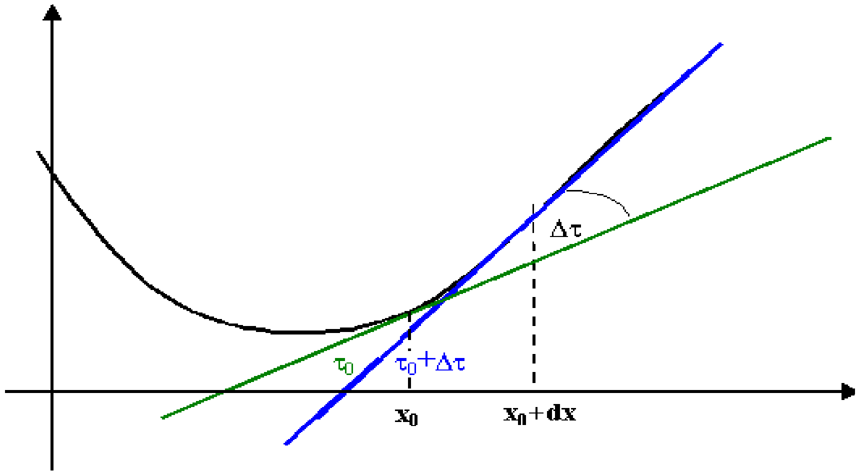
- für die Parameterdarstellung: $ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$

- in Polarkoordinaten: $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$

denn $dx = (r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi$ und $dy = (r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi) \cdot d\varphi$

d) Krümmung und Krümmungsradius

Unter der Krümmung einer Kurve versteht man ihre Abweichung von einer Geraden (Geraden haben also die Krümmung 0). Ein geeignetes Maß hierfür ist die Größe (sofern sie existiert)



$$\kappa = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

Wegen $\tan\tau = y'$ ist $\tau = \arctan y'$ und somit ergibt sich

$d\tau = \dfrac{y''}{1+(y')^2} \cdot dx$. Außerdem ist $ds = \sqrt{1+(y')^2} \cdot dx$, so dass man

$$\boxed{\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}}$$

erhält. Um diese Größe auch für eine Parameterdarstellung und für Polarkoordinaten angeben zu können, müssen wir zunächst y'' geeignet angeben.

<u>Parameterdarstellung:</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

Also erhält man als Krümmungsmaß

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{\dfrac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}}{\sqrt{\left[1+\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^3}} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right]^3 \cdot \dot{x}^6}}.$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}}$$

$\underline{\text{Polarkoordinaten:}}\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi} \Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\varphi}}$$

$$= \frac{(r'' \sin\varphi + 2r' \cos\varphi - r\sin\varphi) \cdot (r' \cos\varphi - r\sin\varphi) - (r' \sin\varphi + r\cos\varphi) \cdot (r'' \cos\varphi - 2r' \sin\varphi - r\cos\varphi)}{(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)^2 \cdot (r' \cos\varphi - r\sin\varphi)}$$

$$= \frac{2r'^2 - r'' \cdot r + r^2}{(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)^3}$$

Also erhält man als Krümmungsmaß

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{\dfrac{2r'^2 - r'' \cdot r + r^2}{(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)^3}}{\sqrt{\left(1 + \left(\dfrac{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi}\right)^2\right)^3}} = \frac{2r'^2 - r'' \cdot r + r^2}{\sqrt{\left[(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r' \sin\varphi + r\cos\varphi)^2\right]^3}}$$

bzw.

$$\boxed{\kappa = \frac{2r'^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}}$$

Nach letzterem hat ein Kreis mit dem Radius R (der in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = R$ gegeben ist) offenbar die konstante Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$.

Man bezeichnet deshalb allgemein die Größe

$$\boxed{\rho = \frac{1}{|\kappa|}}$$

als **Krümmungsradius der Kurve** an der entsprechenden Stelle.

Das Vorzeichen der Krümmung gibt im Falle von Funktionsgraphen an, ob die Funktion konvex ($\kappa > 0$) oder konkav ($\kappa < 0$) ist. Im Falle von allgemeinen Kurven hat eine Beachtung des Vorzeichens nur Sinn, wenn man die Kurve (und damit ihre Tangenten und Normalen) als orientierte Größen betrachtet.

Wiederholende Beispiele zum Abschnitt 3.7

3.8 Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen (Newton-Verfahren)

Wie wir bereits im Zusammenhang mit Polynomgleichungen gesehen haben, kann man - von wenigen Ausnahmen abgesehen - nichtlineare Gleichungen im allgemeinen nicht direkt lösen sondern muss sich numerischer Verfahren bedienen.

Die einfachste und einsichtigste Methode ist das **Halbierungsverfahren**:

Ausgangspunkt ist ein Intervall $[a,b]$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat also mindestens eine Lösung in $[a,b]$.

Man berechnet $f(c)$ mit $c = \frac{a+b}{2}$.

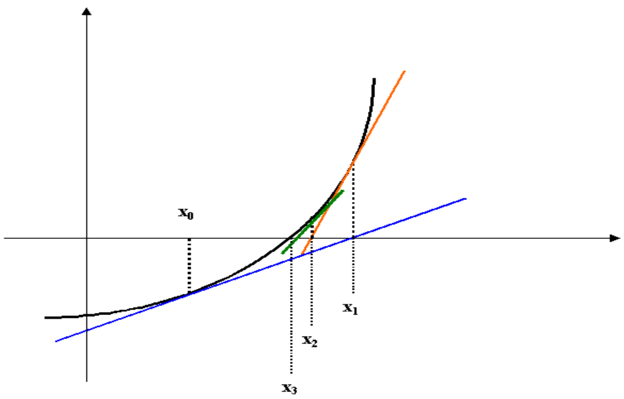
Ist $f(a) \cdot f(c) < 0$, so nimmt man $[a,c]$ als neues Intervall,

ist $f(c) \cdot f(b) < 0$, so nimmt man $[c,b]$ als neues Intervall.

Diese Methode ist zwar sehr einsichtig und führt auch zwingend zum Ziel; wegen ihrer langsamen Konvergenz ist sie aber praktisch kaum zu gebrauchen. Außerdem versagt sie z.B. bei Doppellösungen.

Wesentlich schneller ist die sogenannte **Tangentenmethode**, die auch als **NEWTONsches Iterationsverfahren** bekannt ist:

Graphisch bedeutet diese Methode folgendes. Man legt im Punkt $(x_0;y_0)$ die Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ und berechnet die Schnittstelle x_1 dieser Tangente mit der x-Achse. Dann legt man die Tangente im Punkt $(x_1;y_1)$ an den Graphen und verfährt immer so weiter.



Das Bild zeigt, dass man unter günstigen Voraussetzungen auf diese Weise eine Folge $\{x_n\}$ erhält, die gegen die Nullstelle der Funktion $y = f(x)$, also die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, konvergiert.

Rechnerisch ergibt sich aus der Tangentengleichung $\boxed{f_T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

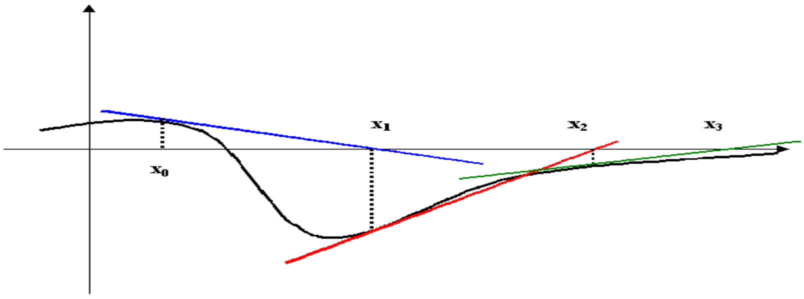
und somit

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \qquad \ldots \text{ usw.}$$

Allgemein also

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wie das folgende Bild zeigt, muss das Newton-Verfahren nicht in jedem Falle konvergieren.



Ohne auf eine exakte Konvergenzbedingung einzugehen, wollen wir hier nur bemerken, dass man in den meisten praktischen Fällen mit guter Konvergenz rechnen kann, wenn man mit einem Startwert beginnt, der genügend nahe bei der Lösung liegt.

Ist $f\,'(x)$ an der Nullstelle gleich oder fast gleich Null, so empfiehlt es sich, anstelle $f\,'(x_n)$ ab einer gewissen Stelle eine Konstante zu nehmen.