2. Reelle Funktionen

2.1 Grundbegriffe

Wenn man den Elementen einer Menge D (**Definitionsbereich**) in eindeutiger Weise die Elemente einer Menge B (**Bildbereich; Wertebereich; Wertevorrat**) zuordnet, spricht man bekanntlich von einer **Abbildung** oder auch **Funktion**. Je nach Herkunft der Mengen D und B unterscheidet man verschiedene Klassen von Funktionen.

Wir behandeln nur

- Reellwertige Funktionen einer reellen Variablen

(kurz: **Funktionen einer Variablen**): $D \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$

und

- Reellwertige Funktion mehrerer reeller Variablen

(kurz: **Funktionen von mehreren Variablen**): $D \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}$.

In beiden Fällen kann die Funktion durch eine **explizite** oder eine **implizite Funktionsvorschrift** sowie dem dazugehörigen Definitionsbereich gegeben sein.

Merke:

1. Neben einer Funktionsvorschrift gehört zu jeder Funktion unbedingt der Definitionsbereich! Ist dieser nicht angegeben, so ist immer die maximale Teilmenge von $\mathbb{R}$ (bei Funktionen einer Variablen) bzw. von $\mathbb{R}^n$ (bei Funktionen von n Variablen) gemeint.

2. Implizite Vorschriften führen häufig nicht zu einer sondern zu mehreren Funktionen.

Wir wenden uns jetzt zunächst den Funktionen einer Variablen zu und gehen am Ende des Kapitels auf die Funktionen von mehreren Varibles ein.

2.2 Graphen und Kurven

Der **Graph einer Funktion** ist eine Kurve in einem ebenen Koordinatensystem.

Wird der Graph einer Funktion $y = f(x)$ um a Einheiten in positiver x–Richtung und um b Einheiten in positiver y–Richtung verschoben, so lautet die zugehörige Funktionsvorschrift $y = f(x - a) + b$.

Daneben gibt es aber auch praktisch interessierende **Kurven**, die nicht als Graph einer reellen Funktion aufgefasst werden können.

Praktisch sind sowohl Kurven im $\mathbb{R}^2$ als auch im $\mathbb{R}^3$ von Interesse. Zu Ihrer Beschreibung ist oft eine sogenannte **Parameterdarstellung** praktikabler als die Beschreibung durch eine implizite Funktionsgleichung. Zur Parameterdarstellung gelangt man, wenn man die Koordinaten jedes Kurvenpunktes $P(x;y;z)$ in Abhängigkeit von einem Parameter t darstellen kann:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}, \qquad t \in I,\, I \subseteq \mathbb{R} \text{ reelles Intervall}$$

Der Parameter t (der auch durch einen anderen Buchstaben, z.B. φ ersetzt werden kann, hat häufig die Bedeutung eines Winkels oder - besonders bei physikalischen Anwendungen - der Zeit.

Wir betrachten nur Kurven in der Ebene.

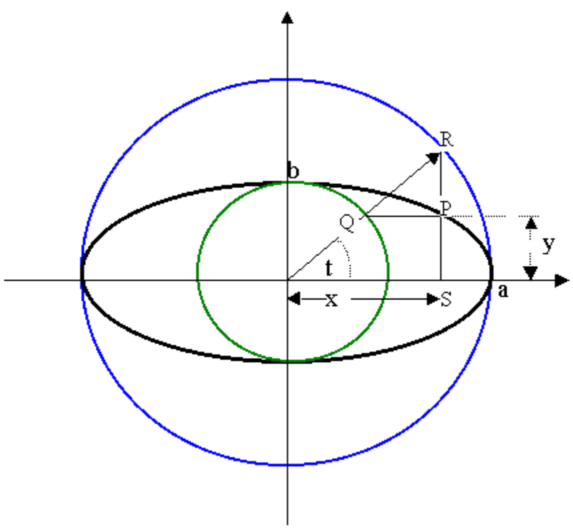
Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b hat in kartesischen Koordinaten die implizite Darstellung

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Eine geeignete Parameterdarstellung ist

$$\boxed{x = a\cos t \qquad y = b\sin t}.$$

Diese wird durch eine Skizze und die nachfolgende Erläuterung verständlich.



Man fällt von einem beliebigen Punkt R des Umkreises das Lot auf die x –Achse (Punkt S). Der Ortsvektor $\overrightarrow{OR}$ schneidet den Innenkreis im Punkt Q. Die zur x –Achse parallele Gerade durch Q schneidet das Lot im Punkt $P(x;y)$ von dem, man zeigen kann, das er ein Ellipsenpunkt ist. Es gilt

$\overline{RS} = \sqrt{a^2 - x^2}$

und nach einem Strahlensatz ist

$\dfrac{\overline{PS}}{\overline{RS}} = \dfrac{b}{a}$ und somit $\overline{PS} = y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Also erfüllt der Punkt P die Ellipsengleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Desweiteren können Kurven häufig in **Polarkoordinaten** sehr gut beschrieben werden. Die Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene ergeben sich bei Vorhandensein eines kartesischen Koordinatensystems aus dem Abstand vom Pol (**Koordinate** r) und dem Winkel zwischen der positiven x-Halbachse (bzw. einer Parallelen hierzu) und dem Polvektor des Punktes (**Koordinate** φ). Dies sind dieselben Koordinaten, die wir bei der trigonometrischen Darstellung einer komplexen Zahl verwendet haben.

$\boxed{\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{array}}$, wenn der Pol im Koordinatenursprung liegt

bzw.

$\boxed{\begin{array}{l} x = x_p + r \cdot \cos\varphi \\ y = y_p + r \cdot \sin\varphi. \end{array}}$ bei allgemeiner Lage des Pols.

Es gilt offenbar der Zusammenhang

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{array}}$$

Für viele Kurven, die in kartesischen Koordinaten nicht explizit durch eine Funktionsgleichung dargestellt werden können, ist dies in Polarkoordinaten in der Form $r = r(\varphi)$ möglich.

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wie verhalten sich die Funktionswerte einer Funktion $f(x)$, wenn sich die unabhängige Variable x einer Stelle x_0 innerhalb oder am Rande des Definitionsbereiches annähert? Die Annäherung kann dabei von links oder von rechts oder auch von beiden Seiten erfolgen - je nachdem, wo Funktionswerte definiert sind; also immer nur innerhalb des Definitionsbereiches.

Merke:

1.) Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an allen denjenigen Stellen des Definitionsbereiches **stetig**, an denen der links- und der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmen. Dies ist der häufigste Fall.

2.) Liegt eine **Polstelle** oder ein **endlicher Sprung** vor, so ist die Funktion dort **unstetig**.

3.) Darüberhinaus gibt es noch **weitere Arten von Unstetigkeiten**, die aber für den Ingenieur ohne größere Bedeutung sind.

Des weiteren interessiert bei der Untersuchung des Graphen einer Funktion das **Verhalten im Unendlichen**, d.h. der Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bzw. beide Limites, je nach Definitionsbereich der Funktion.

2.4 Wichtige Klassen reller Funktionen

Beim jetzt folgenden Besprechen der wichtigsten Klassen von Funktionen (einer Variablen) sind die folgenden Punkte von besonderer Bedeutung:

1. Definitionsbereich und Wertebereich

2. Wie sieht der Graph aus?

3. Gibt es besondere Eigenschaften (Symmetrien; Periodizität; Monotonie; Verhalten im Unendlichen)?

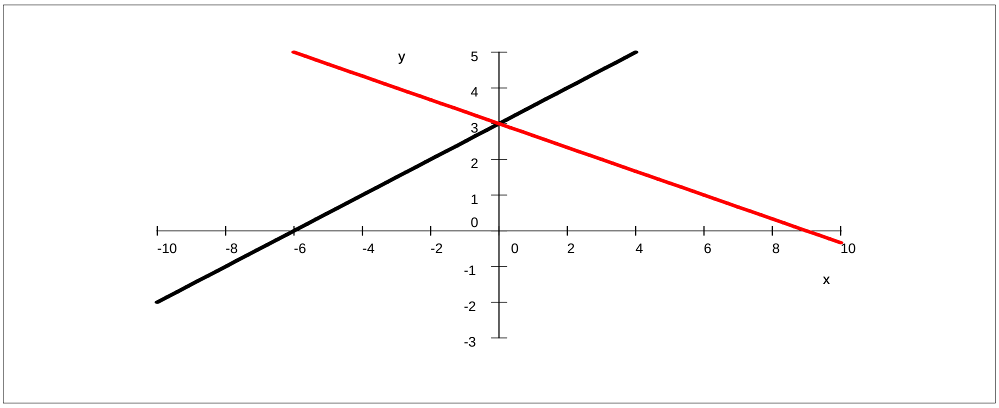
4. Gibt es Unstetigkeitsstellen?

5. Wie sieht die Umkehrfunktion aus (die evtl. nur in einem eingeschränkten Definitionsbereich existiert)?

2.4.1 Lineare Funktionen

$f(x) = ax + b$	$D_f = \mathbb{R}$	$W_f = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ für } a > 0 \\ -\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$		
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty \text{ für } a > 0 \\ +\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$		
Polstellen: keine		

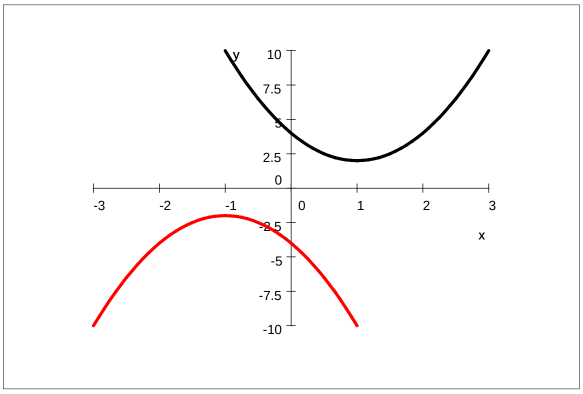
Beispiel-Graphen: $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ (schwarz) und $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ (rot)



2.4.2 Quadratische Funktionen

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = \begin{cases} [y_s, \infty] \text{ für } a > 0 \\ [-\infty, y_s] \text{ für } a < 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ *für* $a > 0$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ *für* $a < 0$
Polstellen: keine	

Beispiel-Graphen: $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ (schwarz) und $f(x) = -2x^2 - 4x - 4$ (rot)



Merke:

1.) Der Faktor a vor x^2 gibt die Steilheit und die Öffnung der Parabel (negativer Faktor bedeutet Öffnung nach unten) an.

$a > 0 \Rightarrow$ Öffnung nach oben

$a < 0 \Rightarrow$ Öffnung nach unten

$|a| > 1 \Rightarrow$ Steiler als Normalparabel

$|a| < 1 \Rightarrow$ Flacher als Normalparabel

2.) Die Scheitelpunktskoordinaten kann man entweder mittels Differentialrechnung als lokales Minimum (Maximum) ermitteln oder durch Umformung (quadratische Ergänzung).

$\boxed{}$

2.4.3 Potenzfunktionen

$f(x) = x^n,\ n = 3,\ 5,\ 7,\ldots$

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Polstellen: keine

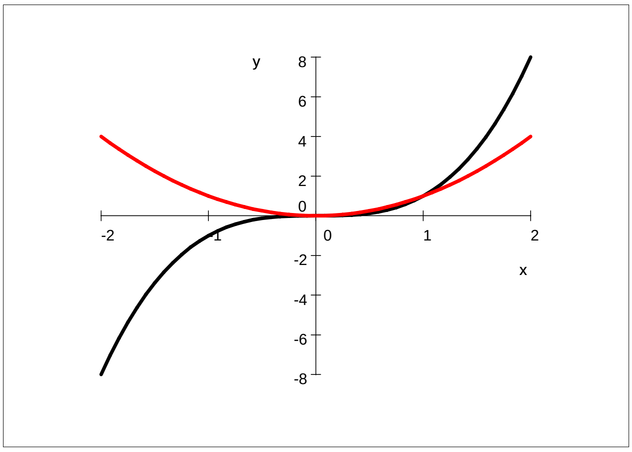
$f(x) = x^n,\ n = 2,\ 4,\ 6,\ldots$

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = [0,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Polstellen: keine

Beispiel-Graphen: $f(x) = x^3$ (schwarz) und $f(x) = x^2$ (rot)



Merke: Potenzfunktionen mit **geradem Exponenten** sind **gerade Funktionen**, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$.

Graphisch bedeutet dies eine Symmetrie zur y –Achse.

Potenzfunktionen mit **ungeradem Exponenten** sind **ungerade Funktionen**, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$.

Graphisch bedeutet dies eine Pol-Symmetrie zum Koordinatenursprung.

2.4.4 Wurzelfunktionen

$f(x) = \sqrt[n]{x},\ n = 3,\ 5,\ 7,\ldots$

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Polstellen: keine

Beispiel-Graph: $f(x) =$

$f(x) = \sqrt[n]{x},\ n = 2,\ 4,\ 6,\ldots$

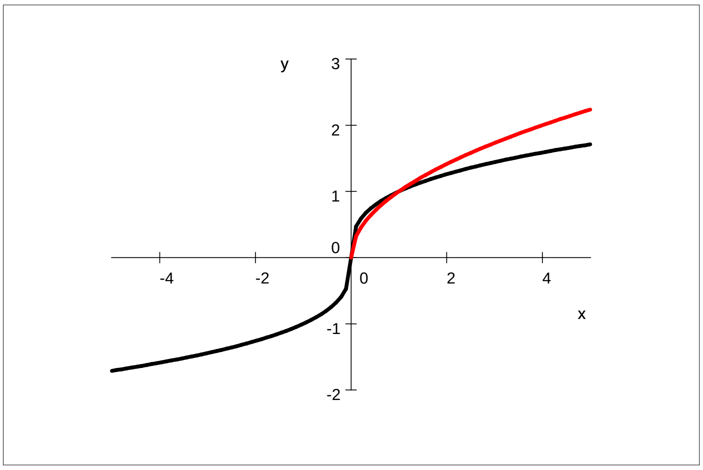
$D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad W_f = [0;\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Polstellen: keine

Beispiel-Graph: $f(x) =$

Beispiel-Graphen: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (schwarz) und $f(x) = \sqrt{x}$ (rot)



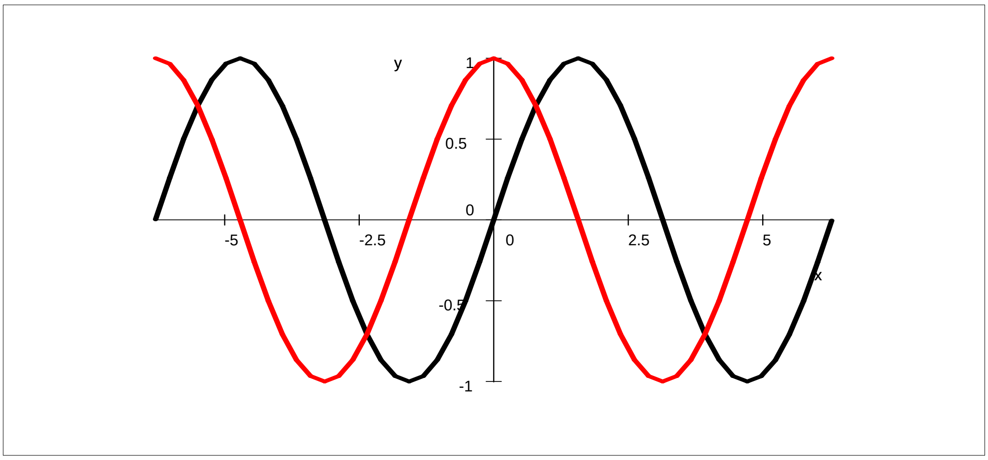
Merke: Für $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kann man auch $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ schreiben, insofern kann man die Wurzelfunktionen als Spezialfälle der allgemeinen Potenzfunktionen $f(x) = x^{\alpha}$ auffassen, die allerdings nur für $x > 0$ definiert sind.

2.4.5 Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x$ (schwarz) und $f(x) = \cos x$ (rot)

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = [-1, 1]$, keine Polstellen

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ existieren nicht



Merke: Die Graphen der Funktionen $f(x) = A\sin(\omega x)$ bzw. $f(x) = A\cos(\omega x)$ unterscheiden sich durch die Perioden (je nach der Größe von ω) und die Amplituden A.

$f(x) = \tan x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi\} \quad W_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ existieren nicht

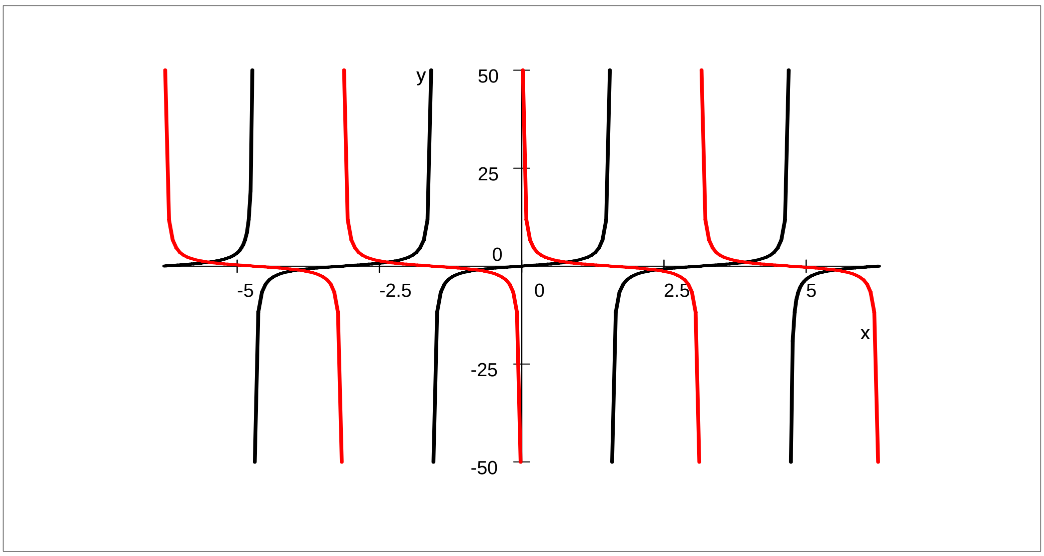
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} f(x) = \mp\infty$ (Wiederholung nach $\pm\pi$)

und $f(x) = \cot x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad W_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ existieren nicht

$\lim\limits_{x \to \pm 0} f(x) = \pm\infty$ (Wiederholung nach $\pm\pi$)



Merke: $f(x) = \tan x$ hat Polstellen bei $\frac{\pi}{2} \pm k\pi$ und $f(x) = \cot x$ hat Polstellen bei

$k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

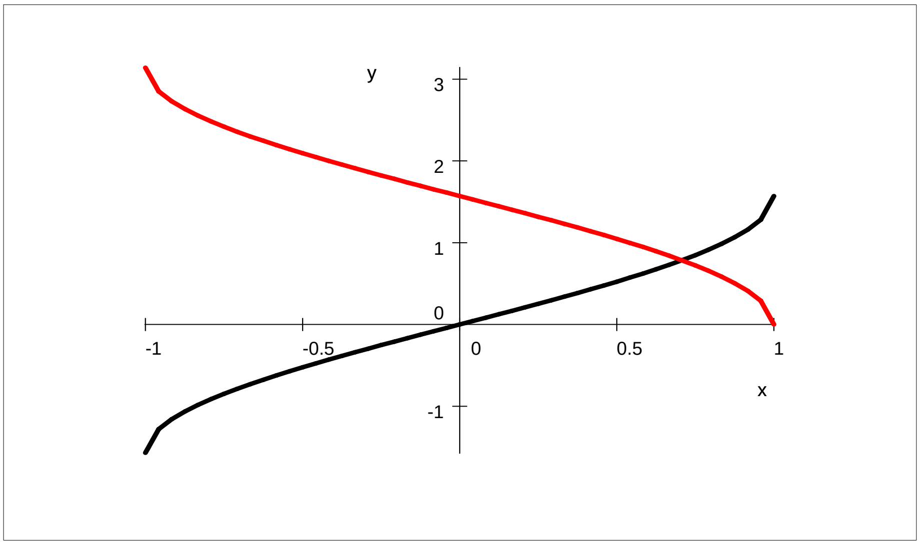
2.4.6 Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Da diese nur in Teilbereichen ihres Definitionsbereiches umkehrbar eindeutig sind (also streng monoton), kann man auch nur für solche Teilbereiche die Umkehrung bilden. Standardmäßig werden folgende Monotonie-Intervalle genommen:

Für $y = \sin x$ wird im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ die Umkehrfunktion $y = \arcsin x$ gebildet.

Für $y = \cos x$ wird im Intervall $[0, \pi]$ die Umkehrfunktion $y = \arccos x$ gebildet.

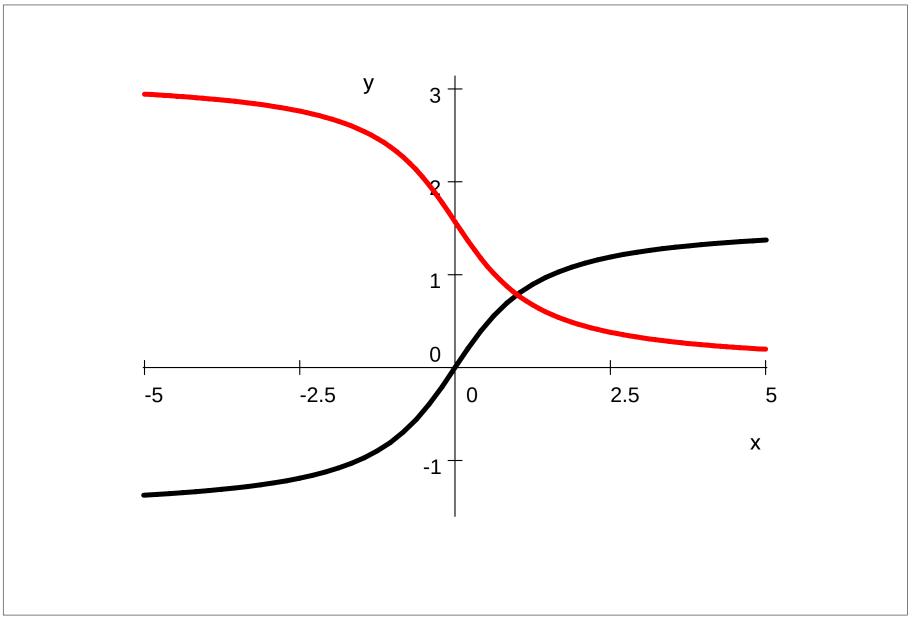
$f(x) = \arcsin x$ (schwarz) und $f(x) = \arccos x$ (rot)
$D_f = [-1, 1] \quad W_f = \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ für } \arcsin x \\ [0, \pi] \text{ für } \arccos x \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ entfallen
Polstellen: keine



Für $y = \tan x$ wird im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Umkehrfunktion $y = \arctan x$ gebildet.

Für $y = \cot x$ wird im Intervall $(0, \pi)$ die Umkehrfunktion $y = \text{arccot}\, x$ gebildet.

$f(x) = \arctan x$ (schwarz) und $f(x) = \text{arccot}\, x$ (rot)
$D_f = \mathbb{R}, \qquad W_f = \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ für } \arctan x \\ (0, \pi) \text{ für } \text{arccot}\, x \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ beim $\arctan x$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pi$ beim $\text{arccot}\, x$
Polstellen: keine



Beachte: Auf vielen Taschenrechnern wird anstelle von $\arcsin x$ die Umkehrfunktion der Sinusfunktion durch $\sin^{-1} x$ dargestellt. Das darf nicht mit $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ verwechselt werden. Analoges gilt für die anderen Winkelfunktionen.

2.4.7 Exponentialfunktionen

$f(x) = a^x, \; a > 1$

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = (0, \infty)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Polstellen: keine

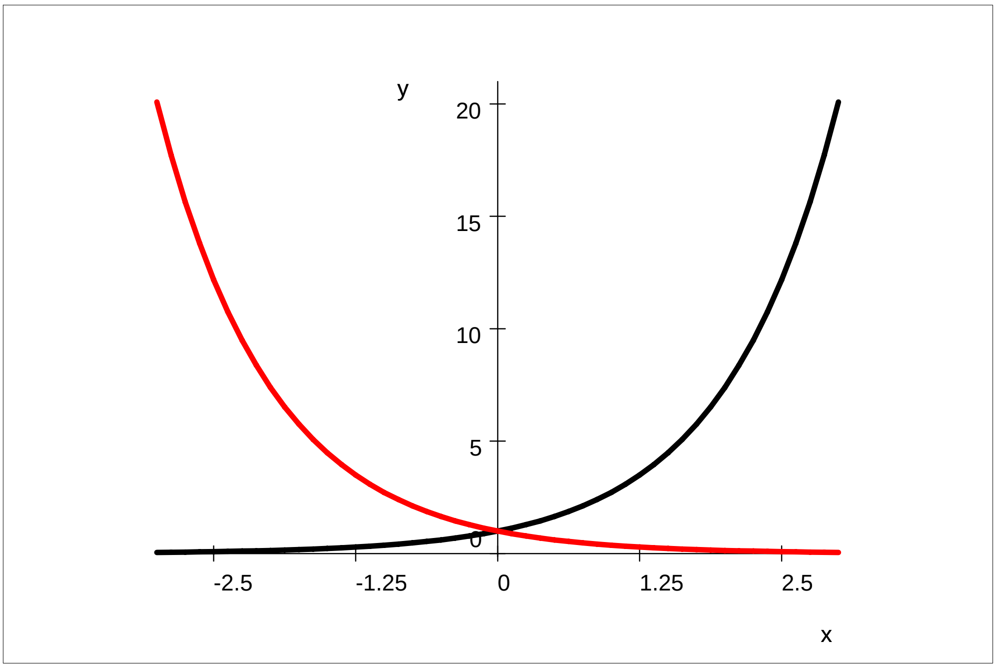
$f(x) = a^{-x}, \; a > 1$

$D_f = \mathbb{R} \quad W_f = (0, \infty)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

Polstellen: keine

Beispiel-Graphen: $f(x) = e^x$ (schwarz) und $f(x) = e^{-x}$ (rot)



2.4.8 Logarithmusfunktionen

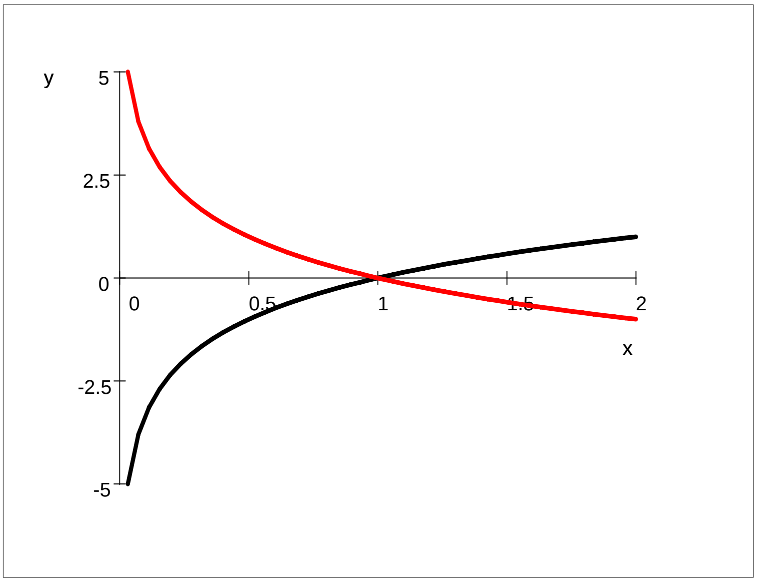
$$f(x) = \log_a x \text{ für } a > 1 \text{ bzw. für } 0 < a < 1$$

$$D_f = (0,\infty) \quad W_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \text{ bzw. } -\infty$$

$$\text{Polstellen: } x_p = 0 \quad \lim_{x\to x_p+0} f(x) = -\infty \text{ bzw. } +\infty$$

Graphen: $f(x) = \log_2 x$ (schwarz) und $f(x) = \log_{0.5} x$ (rot)



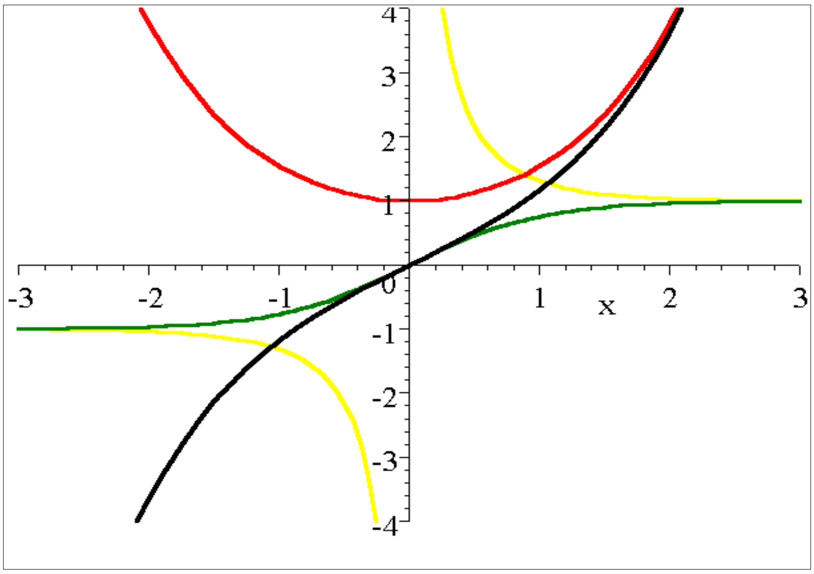
2.4.9 Hyperbolische Funktionen (Hyperbelfunktionen)

Es hat sich als nützlich erwiesen, gewisse Linearkombinationen von *e*-Funktionen als eigenständige Funktionen zu definieren:

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
Def.-Bereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$[1,\infty]$	$(-1,1)$	$\mathbb{R} \setminus [-1,1]$
ungerade (u) / gerade (g)	u	g	u	u
Farbe des Graphen:	schwarz	rot	grün	gelb



Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden als **Areafunktionen** bezeichnet. Im Falle des cosh muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden. Die Areafunktionen lassen sich durch ln-Funktionen darstellen.

2.4.10 Ganze rationale Funktionen (Polynomfunktionen)

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Sie sind stetig im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und besitzen genau n reelle oder komplexe Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die aber nicht alle verschieden voneinander sein müssen.

Die rechte Seite $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ wird als **Polynom n-ten Grades in der Variablen** x bezeichnet.

Man kann sich leicht überlegen, dass der Term

$$\boxed{a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)},$$

in dem die $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ bekannte reelle Zahlen sind, sich durch Ausmultiplizieren ebenfalls als Polynom "entpuppt".

Für quadratische Polynome sieht man sofort den Zusammenhang zwischen den Nullstellen und der Produktdarstellung.

Allgemein gilt der **Hauptsatz der Algebra**:

Jedes Polynom n-ten Grades lässt sich auch in Produktform schreiben:

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).}$$

Dabei sind die $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ die reellen oder komplexen Lösungen der Gleichung

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}.$$

Eine solche **algebraische Gleichung n-ten Grades (Polynomgleichung)** lässt sich nur in Ausnahmefällen geschlossen lösen (insbesondere mit vertretbarem praktischen Aufwand). Hier bevorzugt man **numerische Verfahren** (bzw. man ist gezwungen, numerische Verfahren heranzuziehen).

Polynomwertberechnung und Abspalten von Nullstellen:

Aus der Produktdarstellung

$$\boxed{P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

ist ersichtlich, dass sich jedes Polynom durch einen Linearfaktor $(x - x_k)$ ohne Rest teilen lässt, falls es sich bei x_k um eine Nullstelle des Polynoms handelt **(Abspalten der Nullstelle)**. Diese Division geschieht manuell am geschicktesten im **Horner-Schema**:

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
x_k & - & x_k \cdot b_n & \ldots & x_k \cdot b_2 & x_k \cdot b_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 & b_0 \begin{cases} = 0, \text{ falls } x_k \text{ eine Nullstelle} \\ = \text{ Rest, falls } x_k \text{ keine Nullstelle} \end{cases}
\end{array}$$

Die b_i sind die Koeffizienten des Restpolynoms und b_0 ist gleichzeitig der Funktionswert des Polynoms an der Stelle x_k.

Allgemeine Polynomdivision:

Für zwei Polynome

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

und

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

kann man für den Fall $n \geq m$ den Quotienten

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

vereinfachen. Dies geschieht durch einfache **Polynomdivision**.

2.4.11 Gebrochene rationale Funktionen

$$\boxed{f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \qquad x\hat{\imath}R\backslash\{x, x, \ldots, x\}} \qquad (1)$$

Dabei sind $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Nullstellen des Nennerpolynoms. Wir setzen o.B.d.A. $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ voraus.
Die Unstetigkeitsstellen einer solchen Funktion sind identisch mit den Stellen, an denen die

Funktion nicht definiert ist, nämlich den Nullstellen des Nennerpolynoms. Bei den Unstetigkeitsstellen handelt es sich um Polstellen oder Lücken

Man unterscheidet

- echt gebrochene rationale Funktionen ($n < m$) und

- unecht gebrochene rationale Funktionen ($n \geq m$).

Das Verhalten im Unendlichen kann man sehr leicht feststellen, indem man den Bruch durch die höchste x-Potenz kürzt und dann x gegen ∞ bzw. $-\infty$ laufen läßt.

Merke:
Die Funktion (1) ist für $x \to \pm\infty$ im Falle $n > m$ bestimmt divergent.

Wenn $n < m$ ist, konvergiert sie gegen Null und für $n = m$ konvergiert sie gegen den Quotienten a_n/b_m.

Je nach dem Zweck weiterer Untersuchungen sind die folgenden Darstellungen einer gebrochenen rationalen Funktion verwendbar.

1. Zähler- und Nennerpolynom werden in **Produktform** dargestellt. Dazu muss man zunächst die reellen Nullstellen des Zählers und des Nenners berechnen. Daraus erkennt man dann die Nullstellen, Polstellen und Lücken der Funktion.

2. Im Falle einer unecht gebrochenen rationalen Funktion ist es oft zweckmäßig, sie als **Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen** rationalen Funktion darzustellen. Dies geschieht durch einfache Polynomdivision.

2. Partialbruchzerlegung für echt gebrochene rationale Funktionen:

Jede echt gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad n < m$$

läßt sich als Summe von Partialbrüchen darstellen, deren Aussehen von der Art der Nullstellen des Nennerpolynoms abhängen.

- Zu einer **einfachen reellen Nullstelle x_1 des Nenners** gehört ein Partialbruch der Gestalt

$$\frac{A}{x - x_1}$$

- Zu einer k-fachen rellen Nullstelle x des Nenners gehört die folgende Summe von Partialbrüchen:

$$\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x - x_2)^k} \quad .$$

- Zu einem **einfachen komplexen Nullstellenpaar des Nenners** gehört ein Partialbruch der Gestalt

$$\frac{C + Dx}{x^2 + bx + c} \quad .$$

- Zu einem **k-fachen komplexen Nullstellenpaar des Nenners** gehört die folgende Summe von Partialbrüchen:

$$\frac{C_1 + D_1x}{x^2 + bx + c} + \frac{C_2 + D_2x}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{C_k + D_kx}{(x^2 + bx + c)^k} \quad .$$

Wir zeigen am Beispiel, wie man die Koeffizienten $A, B, \ldots$ usw. ermitteln kann.

2.5 Funktionen von zwei Variablen

2.5.1 Einführung

Wir hatten bereits früher den Begriff der *reellwertigen Funktion mehrerer reeller Variablen* erklärt. Der Unterschied zu den bisher behandelten Funktionen besteht darin, dass der Definitionsbereich D nicht mehr eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sondern jetzt eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ist. Der Wertebereich soll weiterhin eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein.

Zwischen den bisher behandelten Funktionen einer Veränderlichen und den jetzt zu behandelnden Funktionen mehrerer Veränderlichen gibt es - die mathematischen Eigenschaften betreffend - viele Gemeinsamkeiten aber auch einige gravierende Unterschiede. Diese Unterschiede lassen sich in der Regel bereits am Beispiel von Funktionen zweier Veränderlichen deutlich zeigen. Eine Erhöhung der Anzahl der Veränderlichen bringt kaum qualitativ neue Probleme.

Da sich zudem Funktionen von zwei Veränderlichen noch relativ gut anschaulich (graphisch) darstellen lassen, **werden wir fast alle Betrachtungen auf den Fall n = 2 beschränken**. Nur gelegentlich (insbesondere bei Beispielen) werden wir auch 3 oder mehr Variable betrachten.

2.5.2 Graphische Darstellung

Während der Graph einer Funktion einer Variablen im Normalfall eine Kurve in der Ebene darstellt (also ein zweidimensionales Gebilde), erhält man für eine Funktion von zwei Variablen eine Fläche im Raum (also ein dreidimensionales Gebilde), die manuell meist nur sehr mühsam (wenn überhaupt) zeichnerisch darstellbar ist. Moderne Computerprogramme (wie z.B. **MATLAB, MAPLE** oder **MATHEMATICA**) leisten auf diesem Gebiet erstaunliches.

Dadurch ist die früher übliche graphische Darstellung von einer Funktion zweier Variablen mit Hilfe von **Höhenlinien (Niveaulinien)**, wie man sie von geographischen Karten her kennt, praktisch kaum noch von Bedeutung. Man erhält eine solche Linie zum Niveau c, indem man die durch die Gleichung

$$f(x,y) = c$$

gegebene Kurve zeichnet. Wenn man genügend viele solche Höhenlinien zeichnet, erhält man einen Eindruck von dem "Funktionsgebirge". Bei den Höhenlinien handelt es sich um in die (x,y)-Ebene projizierte Schnittkurven, die man erhalten würde, wenn man das "Funktionsgebirge" jeweils in der Höhe $h = c$ über der (x,y)-Ebene parallel zu dieser zerschneiden würde.

Funktionen von drei und mehr Veränderlichen sind direkt nicht mehr graphisch darstellbar.

2.5.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Bei Funktionen einer Variablen kann man den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle x_0 über den links und rechtsseitigen Grenzwert erklären, weil man sich der Stelle x_0 nur von links oder rechts (also nur aus endlich vielen Richtungen) nähern kann.

Für Funktionen mehrerer Variablen ist das qualitativ anders, denn bereits für $n = 2$ (also in der Ebene) kann man sich der Stelle $P_0(x_0,y_0)$ aus unendlich vielen Richtungen nähern.

Man bezeichnet dann

g als **Grenzwert der Funktion** $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0),

wenn für beliebige Folgen $\{(x_n,y_n)\}$, die gegen (x_0,y_0) konvergieren (egal aus welchen Richtungen) die Folgen der Funktionswerte $\{z_n\} = \{f(x_n,y_n)\}$ gegen g konvergieren.

Nützlich ist diese Definition allerdings in erster Linie für Negativaussagen.

Die **Stetigkeit** wird wie bei Funktionen einer Veränderlichen erklärt:

$z = f(x,y)$ heißt an der Stelle $(x_0;y_0)$ stetig, wenn dort der Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0;y_0)$ übereinstimmt.

Bei den praktisch relevanten Funktionen erkennt man die **Unstetigkeitsstellen** in der Regel aus den Funktionsgleichungen unter Zuhilfenahme der Eigenschaften von stetigen Funktionen, die im wesentlichen dieselben wie bei Funktionen einer Variablen sind.

Bei der Erstellung von Graphen mittels der erwähnten Software ist zu beachten, dass diese häufig Unstetigkeitsstellen nicht erkennt. Dies führt mitunter zu nicht korrekten Darstellungen in der Nähe von solchen Stellen.