1. Zahlenfolgen und Reihen

Wenn man eine endliche Menge von Zahlen hat, kann man diese in einer bestimmten Reihenfolge durchnummerieren:

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Man spricht von einer **endlichen Zahlenfolge**. Fügt man immer mehr Zahlen hinzu, so gelangt man zu einer **unendlichen Zahlenfolge**, wobei das Attribut "unendlich" in der Regel weggelassen wird.

Zahlenfolgen sind also spezielle reelle Funktionen mit $D \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ als Definitionsbereich und $B \subseteq \mathbb{R}$ als Bildmenge.

Der Umgang mit Folgen dürfte aus der Schule bekannt sein. Wir wiederholen nur einige wichtige Details.

1.1 Monotonie und Beschränktheit

Folgen können **monoton wachsend, monoton fallend, alternierend** oder **nichts von alledem** sein.

Die Untersuchung auf Monotonie kann man allgemein so durchführen, dass man die Qotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oder die Differenzen $a_{n+1} - a_n$ untersucht:

Gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ bzw. $a_{n+1} - a_n < 0$ für alle n, so ist die Folge monoton fallend.

Gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ bzw. $a_{n+1} - a_n > 0$ für alle n, so ist die Folge monoton wachsend.

Folgen können **nach unten beschränkt** oder **nach oben beschränkt** sein.

Trifft beides auf eine Folge zu, so heißt sie **beschränkt**.

1.2 Grenzwerte von Folgen

Die Zahl h heißt **Häufungspunkt** der Folge $\{a_n\}$, wenn es in jeder **beliebig kleinen Umgebung** von h unendlich viele Glieder der Folge gibt. Eine Folge kann einen oder mehrere Häufungspunkte haben.

Hat eine Folge $\{a_n\}$ nur einen Häufungspunkt a, so nennt man diesen den **Grenzwert der**

Folge und schreibt dafür

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ bzw. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a}$$

(Für diesen Grenzwert gilt: $\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_\varepsilon(n > N_\varepsilon \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon).$*)*

Im Klartext heißt das, dass in jeder beliebig kleinen Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge liegen, während sich nur endlich viele ausserhalb befinden.

In diesem Falle spricht man von einer **konvergenten** Folge.

Daneben gibt es **bestimmt divergente** und **unbestimmt divergente** Folgen.

Merke:

Ist eine Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, so muss sie einen Grenzwert haben.

Ebenso muss sie einen Grenzwert haben, wenn sie monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

Manchmal kann man von einer Folge feststellen, dass sie einen Grenzwert hat. Die Angabe desselben ist aber u.U. sehr schwierig oder nur angenähert möglich.

Achtung! Oftmals versucht man, den Grenzwert einer Folge durch eine Vermutung zu ermitteln, indem man einige - vielleicht auch viele - Glieder der Folge berechnet. Diese Verfahrensweise geht oft daneben.

Wichtige Folgen sind:

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0 & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{q^n} = 0,\ q > 1,\ k \in \mathbb{N} \\
\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \text{wenn } |q| < 1 & \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{wenn } q > 1 \\
\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1,\ p > 0 & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0,\ x > 0 & \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x
\end{array}$$

Für **zwei konvergente** (nicht aber automatisch auch für bestimmt divergente) **Folgen** gelten für die bekannten Operationen die folgenden **Regeln** mit den entsprechenden Einschränkungen (jeder lim ist dabei als $\lim\limits_{n\to\infty}$ zu verstehen):

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$	2. $\lim(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim a_n,\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$	4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls alle $b_n \neq 0$ und $\lim b_n \neq 0$
5. $\lim((a_n)^p) = (\lim a_n)^p,$ falls $p > 0$	

In manchen Fällen entstehen sogenannte **unbestimmte Ausdrücke** (d.h. man kann nicht unmittelbar die Konvergenz oder Divergenz erkennen), z.B.:

unbestimmter lim		**Bedingung**	**Symbol**
1. $\lim(a_n - b_n)$		$\lim a_n = \infty \ \wedge \ \lim b_n = \infty$	„$\infty - \infty$"
2. $\lim(a_n \cdot b_n)$		$\lim a_n = \infty \ \wedge \ \lim b_n = 0$	„$\infty \cdot 0$"
3. $\lim \frac{a_n}{b_n}$		$\lim a_n = \infty \ \wedge \ \lim b_n = \infty$	„$\frac{\infty}{\infty}$"
4. $\lim \frac{a_n}{b_n}$		$\lim a_n = 0 \ \wedge \ \lim b_n = 0$	„$\frac{0}{0}$"
5. $(\lim a_n)^{\lim b_n}$		$\lim a_n = 0 \ \wedge \ \lim b_n = 0$	„0^0"
6. $(\lim a_n)^{\lim b_n}$		$\lim a_n = 0 \ \wedge \ \lim b_n = \infty$	„0^∞"
7. $(\lim a_n)^{\lim b_n}$		$\lim a_n = \infty \ \wedge \ \lim b_n = 0$	„∞^0"
8. $(\lim a_n)^{\lim b_n}$		$\lim a_n = 1 \ \wedge \ \lim b_n = 0$	„1^0"
9. $(\lim a_n)^{\lim b_n}$		$\lim a_n = 1 \ \wedge \ \lim b_n = \infty$	„1^∞"

Wir kommen hierauf in der Differentialrechnung zurück.

1.3 Reihen

Aus einer Zahlenfolge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kann man durch Summation der Glieder eine neue Folge bilden:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\ldots$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

...

Das n-te Glied $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ wird als n-te Partialsumme und diese neue Folge insgesamt wird als Folge der Partialsummen bezeichnet. Führt man den Grenzprozess durch, so benutzt man die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und bezeichnet das Ganze als

unendliche Reihe.

Genauer werden wir solche Reihen im 2. Semester untersuchen.

Für einige wenige Folgen kann man die n-ten Partialsummen als geschlossene Formel angeben, z.B. für die sogenannten **geometrischen Folgen**,

$$\boxed{a_n = q^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots}.$$

Diese Folge ist

konvergent für	$-1 < q \leq 1$
best. divergent für	$q > 1$
unbest. divergent für	$q \leq -1$

Durch Aufsummieren der Folgenglieder kommt man zur Folge der Partialsummen

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + q, \quad s_2 = 1 + q + q^2, \ \ldots, \ s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n, \ \ldots.$$

Das allgemeine Glied kann man in diesem speziellen Falle geschlossen (also ohne Summensymbol) darstellen:

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^k \\ q \cdot s_k &= \phantom{1 +{}} q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} \\ (1-q) \cdot s_k &= 1 - q^{k+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}}.$$

Damit hat man die **geometrischen Reihe**: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$, die offensichtlich

- konvergent für $|q| < 1$**,**

- bestimmt divergent für $q > 1$ **(direkt aus der Reihe erkennt man dies auch für** $q = 1$**),**

- unbestimmt divergent für $q \leq -1$

ist.

(1.4 Die Eulersche Zahl e)

Wir untersuchen jetzt die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Wir werden zeigen, dass sie monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Dabei verwenden wir den Binomischen Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Für die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *gilt demzufolge:*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right.$$

Geht man jetzt zu a_{n+1} *über, so kommt einmal ein weiterer positiver Summand hinzu und außerdem werden in jedem Summanden die Faktoren vom Typ* $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ *ersetzt durch einen größeren Faktor* $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$.

Damit gilt $a_{n+1} > a_n$. *Also ist die Folge monoton wachsend.*

Des weiteren ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right.$$

$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, *denn alle Faktoren* $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ *sind ja kleiner als 1.*

Wir vergrößern weiter:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Die Folge ist also auch nach oben beschränkt, und da sie monoton wachsend ist, muss sie einen Grenzwert haben. Dieser Grenzwert muss zwischen 2 und 3 liegen, denn nach unten ist die Folge ja durch 2 beschränkt.

Der Grenzwert wird als Eulersche Zahl e bezeichnet. Man kann ihn mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Beispielsweise erhält man für

$n = 10$: $(1 + \frac{1}{10})^{10} = 1.5937$

$n = 100$: $(1 + \frac{1}{100})^{100} = 1.7048$

$n = 1000$: $(1 + \frac{1}{1000})^{1000} = 1.7169$

$n = 10.000$: $(1 + \frac{1}{10000})^{10000} = 1.7181$.

Hieraus ist zu erkennen, dass die Konvergenz der Folge nur sehr langsam erfolgt. Zur numerischen Berechnung von e sind andere Methoden geeigneter. Mit 15 Stellen nach dem Komma gilt $e = 1.718\,281\,828\,459\,045\ldots$