Analysis I

Hilfsmittel für Klausur:

- Skripte zu den Vorlesungen (ohne Beispiele)
- Formelsammlung (Grützmann)
- Taschenbuch der Mathematik (Bronstein / Semendjajew / Musiol / Mühling)
- Mathematische Formeln (Bartsch – Fachverlag Leipzig)
- Mathematische Formelsammlung (Papula)
- **kein Taschenrechner**

Symbole aus der Logik und Mengenlehre (TdM K25):

Komplement $\bar{p}$ einer Aussage p

Das Gegenteil von p (Aussage) ist $\bar{p}$ (Komplement)

Implikation: (aus p folgt q) oder auch (wenn p dann q) → $p \Rightarrow q$

Äquivalenz ist Implikation in beide Richtungen (hin und zurück) → $p \Leftrightarrow q$

Disjunktion (p oder q) → $p \vee q$
(bedeutet aber nicht „entweder oder", eine Zahl kann also auch Element von p und q sein)

Konjunktion (p und q) →$p \wedge q$

Es gibt ein ... → ∃

Für alle ... → ∀

Leere Menge → {} bzw. ∅ (Enthält kein Element)

x ist Teilmenge von A → $x \subseteq A$

x ist echte Teilmenge von A → $x \subset A$

x ist Element der Menge M → $x \in M$

x ist kein Element der Menge M → $x \notin M$

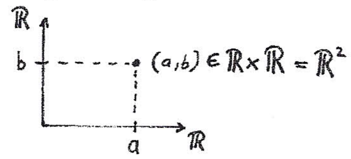
Vereinigung von Mengen →$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

Durchschnitt von Mengen → $A \cap B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

Differenz von Mengen →$A\backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$

Disjunkte Menge → $A \cap B = \emptyset$

Menge aller geordneten Paare → $A \times B = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$



Interval:

offenes Interval → $(a, b) = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$

abgeschlossenes Interval → $[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$

halboffenes Interval → $(a, b] = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$ oder $[a, b) = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$

Logarithmen:

$b^c = a \Leftrightarrow c = \log_b a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$

c wird als Logarithmus von a zur Basis b bezeichnet.

Wegen der Äquivalenz kann man alle Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen herleiten.

Trivial: $\log_b 1 = 0, denn\ b^0 = 1$

1. Gruppe:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$$

2. Gruppe:

$$\log_b d = \frac{1}{\log_d b}$$

$$\log_b a = \frac{\log_d a}{\log_d b} = \log_b d \cdot \log_d a$$

Man beachte: Ein Logarithmus kann nur von einer positive Zahl gebildet warden und zwar zu einer ebenfalls positiven Basis die aber nicht 1 sein darf!

Von besonderer Bedeutung sind in der Praxis:

- der dekadische Logarithmus (Basis 10) → $\lg x = \log_{10} x$
- der natürliche Logarithmus (Basis e) → $\ln x = \log_e x$
    - $e = 2{,}718 \ldots \rightarrow eulerische\ Zahl$

Beispiel:

$$\log_2 16 = 4, denn\ 2^4 = 16$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2, denn\ 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\ln(e^{3x}) = \log_e(e^{3x}) = 3x, denn\ e^{3x} = e^{3x}$$

Anwendung der 1.Gruppe:

$$\ln\frac{2\sqrt{a+b}\cdot a^3b^2}{\sqrt[3]{c}\cdot(a+c)^2} = \ln(2)+\frac{1}{2}\ln(a+b)+3\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}\ln c-2\ln(a+c)$$

Übungsaufgabe:

1. Löse nach x auf.

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$$

2. Berechne x (ohne Taschenrechner).

$$\lg 3+\lg\frac{1}{3}=x$$

$$\lg\sqrt{\frac{1}{10}}=x$$

$$\ln\left(\sqrt{e}\right)^3=x$$

3. Löse nach n auf.

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$