Im Folgenden finden Sie die Aufgabenstellungen der bisherigen Klausuren Analysis 1 im Bachelorstudium der ET-Studiengänge sowie knapp gehaltene Ergebnisangaben. Die Lösungswege sind absichtlich nicht angegeben, Fragen können aber in den Übungen gestellt werden.

Alle Klausuren dauerten 120 Minuten. Taschenrechner waren nicht zugelassen.

Analysis1-Klausur vom 30.01.2007, Erreichbare Punktzahl: 6+6+6+6+6+6+4=40

Aufgabe 1: a) Ordnen Sie die folgenden reellen Zahlen der Größe nach und beginnen Sie mit der kleinsten!

$a = \ln 2,\ \ b = \sin\frac{\pi}{2},\ \ c = \log_5\left(\frac{1}{2}\right),\ \ d = \sqrt{1-\cosh 0}\,,\ \ f = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}-e^{-x}}$

b) Durch welche Verschiebung in x – Richtung und in y – Richtung geht der Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$ aus dem Graphen der Funktion $g(x) = 2x^2 + 3$ hervor?

c) Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $\sin 2x + \tan 2x = 0$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$!

Aufgabe 2: *(Gehört jetzt in die Algebra)*

a) Welche der beiden komplexen Zahlen $z_1 = \dfrac{2+2j}{1-j}$, $z_2 = 3e^{2j}$ hat den größeren Betrag?

b) Welche der beiden komplexen Zahlen hat das größere Argument?

Aufgabe 3: Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion an der Stelle x_0?

a) $f(x) = \sin 2x \cdot \tan 3x\,;\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,;\ x_0 = 1$

Aufgabe 4: Gegeben ist die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+4}$.

a) Wo ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend?

b) Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav?

Aufgabe 5: Welche Fläche schließt der Graph der Funktion $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$ mit der x –Achse im Intervall $-1 \le x \le 2$ ein? (Hinweis: Wurzelwerte müssen nicht ausgerechnet werden!)

Aufgabe 6: Stellen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^4-2x^3-1}{x^2-2x+1}$ als Summe einer ganzen rationalen Funktion und von Partialbrüchen dar!

Aufgabe 7: *(Gehört jetzt in Analysis 2)*

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ an der Stelle $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ in der Richtung des Winkels $\alpha = 45°$!

Lösung 1: a) $c < 0 = d < a < 1 = b < f = 2$

b) 2 Einheiten nach rechts und 0 Einheiten in y –Richtung!

c) $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$

Lösung 2: a) $|z_1| = 2 < 3 = |z_2|$

b) $z_1 = 2j \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} < \arg(z_2) = 2$

Lösung 3: a) $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ b) $f'(1) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}$

Lösung 4: a) $f(x)$ ist monoton wachsend in D_f.

b) $f(x)$ ist konvex für $x < -2$ und konkav für $x > -2$

Lösung 5: $A = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} + 16\sqrt{2} - 16\right)$

Lösung 6: $f(x) = x^2 - 1 - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$

Lösung 7: $\frac{\partial z}{\partial \alpha}(P_0) = \frac{7\sqrt{2}}{10} \approx 0{,}99$

Analysis1-Klausur vom 11.05.2007, Erreichbare Punktzahl: 11+7+5+7+4+6=40

Aufgabe 1: Gegeben ist die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

a) Berechnen Sie evtl. vorhandene Nullstellen und Unstetigkeitsstellen der Funktion sowie ihre Asymptote für $x \to \pm\infty$!

b) Wie verhalten sich die Funktionswerte bei Annäherung (von links und rechts) an die Unstetigkeitsstellen?

c) In welchem Teil des Definitionsbereiches ist die Funktion monoton wachsend?

d) In welchem Teil des Definitionsbereiches ist die Funktion konvex?

e) An welcher Stelle $x_1 > 1$ ist der Anstieg des Graphen der Funktion um 20% größer als an der Stelle $x_0 = 0$?

Aufgabe 2: *(Gehört jetzt in die Algebra)*

a) Man berechne die komplexe Zahl $z = \frac{2-4j}{2+j} \cdot e^{\frac{\pi}{3}j}$ und gebe das Ergebnis in der arithmetischen, in der trigonometrischen und in der Exponentialform an!

b) Man berechne $|z|$!

Aufgabe 3: Geben Sie für die Funktion

$$y = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 21x + 18}$$

den Ansatz für die Partialbruchzerlegung an! Die weitere Rechnung soll nicht erfolgen!

Hinweis: $x = 3$ ist eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms!

Aufgabe 4: Hat die Funktion $f(x) = \sin^2\left(\ln^2(\frac{x}{2}+1) + \frac{\pi}{4}e^{-2x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ein relatives (lokales) Extremum?

Aufgabe 5: Man berechne $\int\limits_0^a 6x^2\cos(x^3 + \frac{\pi}{2})dx$ mit $a = \sqrt[3]{\pi}$!

Aufgabe 6: *(Gehört jetzt in Analysis 2)*

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $z(x,y) = (x^2+y)\cos(x+y^2)$ an der Stelle $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$ an!

Lösung 1: a) Nullstelle: $x_N = 2$, Polstelle: $x_P = 1$ Asymptote: $y_{As} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 1+0} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1-0} = +\infty$ c) mon. wachs. in D_f.

d) konvex in $(-\infty, 1)$ e) $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{5}{6}}$

Lösung 2: a) $z = -2e^{\frac{5}{6}\pi j} = -2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + j\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - j$

b) $|z| = \sqrt{3+1} = 2$

Lösung 3: $\dfrac{x^3-2x+4}{(x-3)^2(x^2-x+2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-x+2}$

Lösung 4: $f'(0) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Kein rel. Extr.!

Lösung 5: $\left[2\sin(x^3+\frac{\pi}{2})\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}} = 2(-1-1) = -4$

Lösung 6: $z_T(x,y) = -2\pi x - y + 3\pi^2$

Analysis1-Klausur vom 12.02.2008, Erreichbare Punktzahl: 6+6+5+5+7+8+3=40

Aufgabe 1: Man gebe je ein Beispiel an für

a) eine in $\mathbb{R}$ stetige und monoton fallende Funktion,

b) eine alternierende Nullfolge,

c) eine echt gebrochene rationale Funktion mit einer Polstelle und einer Lücke,

d) eine geometrische Folge, bei der jedes Glied um 20% größer ist als sein Vorgänger,

e) eine kubische Funktion, die an der Stelle $x = 1$ den Anstiegswinkel 60° hat,

f) eine quadratische Funktion $f(x)$, für die $\int\limits_1^2 f(x)dx = 0$ gilt!

Aufgabe 2: Man berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(-1)^n n}{\sqrt{n^5}-2n+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

Aufgabe 3: Man zerlege die Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ in eine Summe von Partialbrüchen!

Aufgabe 4: Man linearisiere die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ an der Stelle $x_0 = 0$!

Aufgabe 5: Wo hat die Funktion $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ im Intervall $[0,9]$ ihr absolutes (globales) Maximum?

Aufgabe 6: Man berechne die bestimmten Integrale!

a) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ b) $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$ c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}dx$ d) $\int\limits_{-1}^{1} \tan^5(4x)dx$

Aufgabe 7: Von welcher Funktion $f(x)$ ist die Funktion

$F(x) = 2\ln\left(\sqrt{x^2-x+5\cos^2\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{x}$

eine Stammfunktion?

Lösung 2: a) 0 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

Lösung 3: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4(x-2)} + \dfrac{3}{4(x+2)}$

Lösung 4: $y_T(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Lösung 5: glob. Max bei $x = 9$

Lösung 6:

a) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{9\pi}{4}$ b) $\left[\ln\left(x+\sqrt{16+x^2}\right)\right]_0^3 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$

c) $\frac{1}{2}[x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ d) 0

Lösung 7: $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x-1-\frac{5}{2}\sin x}{x^2-x+5\cos^2\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{x^2}$

Analysis1-Klausur vom 21.05.2008, Erreichbare Punktzahl: 8+7+12+7+3+3=40

Aufgabe 1: Man gebe je ein Beispiel an für

a) die Funktionsgleichung einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1;3)$,

b) eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit dem Grenzwert 7, für die $a_3 = 3$ gilt,

c) eine gerade Funktion $f(x)$ mit $f(2) = 2$,

d) eine Funktion $g(x)$, deren Graph bei $x = 1$ einen um 20% größeren Anstieg hat als der Graph von $f(x) = \sqrt{x}$,

e) eine Funktion $f(x)$, für die $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ gilt!

Aufgabe 2: Wie lautet das Taylorpolynom 2. Grades für die Funktion $f(x) = e^{x^2-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$?

Aufgabe 3: Für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$$

ist eine Stammfunktion $F(x)$ zu ermitteln! (Hinweis: Partialbruchzerlegung!)

Aufgabe 4: Warum hat die Funktion $f(x) = \cos^2\left(\ln^2(\frac{x}{2} + 1) + \frac{\pi}{4}e^{-2x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ kein relatives (lokales) Extremum?

Aufgabe 5: Man berechne die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = \ln x$ und $g(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1,2]$!

Aufgabe 6: Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$!

Lösung 2: $T_2(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2$

Lösung 3: $F(x) = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{2(x-2)^2} - \int \frac{3dx}{2x^2} = \ln|x-2| - \frac{1}{2x-4} + \frac{3}{2x}$

Lösung 4: $f'(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Kein rel. Extremum!

Lösung 5: $A = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} - \ln 4$

Lösung 6: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$