Fachhochschule Jena,	**Fachbereich GW,**	**Prof. Dr. J. Grützmann**
Wiederholungsprüfung Analysis 1 für ET(Ba)	**am 30.04.2010**	**Zeit: 120 Minuten**

Aufgabe 01: a) Man ordne die folgenden reellen Zahlen der Größe nach und beginne mit der kleinsten!

$a = \ln 2,\ \ b = \sin\frac{\pi}{2},\ \ c = \log_5\left(\frac{1}{2}\right),\ \ d = \sqrt{1-\cosh 0}\,,\ \ e = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}-e^{-x}}$

b) Durch welche Verschiebung in x – Richtung und in y – Richtung geht der Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$ aus dem Graphen der Funktion $g(x) = 2x^2 + 3$ hervor?

c) Berechne alle reellen Lösungen der Gleichung $\sin 2x + \tan 2x = 0$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$!

Aufgabe 02: Gesucht ist das globale Minimum und das globale Maximum der Funktion $y = \frac{x-1}{x+1}$ im Intervall $[0,4]$.

Aufgabe 03: Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion an der Stelle x_0?

a) $f(x) = \sin 2x \cdot \tan 3x\,;\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\ ;\ x_0 = 1$

Aufgabe 04: Gegeben ist die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$.

a) Wo ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend?

b) Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav?

Aufgabe 05: Welche Fläche schließt der Graph der Funktion $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$ mit der x–Achse im Intervall $-1 \le x \le 2$ ein? (Hinweis: Wurzelwerte müssen nicht ausgerechnet werden!)

Aufgabe 06: Stellen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ als Summe einer ganzen rationalen Funktion und von Partialbrüchen dar!

Aufgabe 07: Für folgende Funktionen sind Stammfunktionen anzugeben!

a) $f(x) = x^2\sqrt{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{x}{1+\cos 2x}$ c) $f(x) = x^2\cos(2x)$

Aufgabe 08: Berechne die bestimmten Integrale!

a) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ b) $\int\limits_{-1}^1 \tan^5(4x)dx$ c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx$

Kurzlösungen

Lösung 01: a) $c < 0 = d < a < 1 = b < e = 2$

b) 2 Einheiten nach rechts und 0 Einheiten in y –Richtung!

c) $\sin 2x = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \vee \cos 2x = -1 \Rightarrow \underline{x_2 = \frac{\pi}{2}}$

Lösung 02: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

$\Rightarrow$ globales Min. in $P_{\min}(0;-1)$ und globales Max. in $P_{\max}(4; \frac{3}{5})$

Lösung 03: a) $f'(x) = 2\cos 2x \cdot \tan 3x + \frac{3\sin 2x}{\cos^2 3x} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{3x^2 \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}$

Lösung 04:

a) $f'(x) = \frac{8}{(2x+4)^2} > 0$ für alle $x \neq -2 \Rightarrow$ $f(x)$ ist monoton wachsend in D_f.

b) $f''(x) = \frac{-32}{(2x+4)^3} > 0$ für $x < -2 \Rightarrow$ $f(x)$ ist konvex für $x < -2$

$\frac{-32}{(2x+4)^3} < 0$ für $x > -2 \Rightarrow$ $f(x)$ ist konkav für $x > -2$

Lösung 05:

$$A = \left| \int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+4}\,dx \right| + \int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} + 16\sqrt{2} - 16\right)$$

Lösung 06: $f(x) = x^2 - 1 - \frac{2x}{(x-1)^2} = x^2 - 1 - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$

Lösung 07: a) $F(x) = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4}^{\,3} + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\,\right|\right)$

b) $F(x) = \frac{1}{2}(x\tan x + \ln|\cos x|)$ c) $F(x) = \frac{2x^2-1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x$

Lösung 08: a) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{9\pi}{4}$

b) $\int_{-1}^{1} \tan^5 x dx = 0$, weil ...

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx = 2\left[\frac{2x^2-1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}$