| | |
|---|---|
| Fachhochschule Jena<br>University of Applied Sciences Jena | **Übungsaufgaben Analysis 1**<br>**ET/AT, KMT, TI WS 2009/10**<br>**Prof. Dr. Grützmann, Fachbereich GW** |

**Aufgabe 1.1:** Bestimmen Sie die ersten vier Glieder der Folgen:

a) $a_k = \frac{(-1)^k}{4^k}$ b) $a_k = \sqrt[k]{16} + 3$ c) $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{k}{2} \cdot 0,1^k$

d) $a_k = \frac{\left(3k + (-1)^k\right)}{k}$ e) $a_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ f) $a_k = \frac{\left(2k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)}{k+1}$

**Aufgabe 1.2:** Von einer arithmetischen Folge (d.h.: Die Differenz $d$ zweier aufeinanderfolgender Glieder ist stets gleich.) seien gegeben:

a) $a_2 = 4,\ d = -2$ b) $a_3 = 12,\ a_8 = 4,5$ c) $a_4 = 8,\ s_{10} = 100$

Bestimmen Sie $a_7$ und $s_{20}$ ! ($s_n$ ist die n-te Partialsumme.)

**Aufgabe 1.3:** Wie groß ist $q$ bei den folgenden geometrischen Folgen?

a) $2;\ \sqrt{2};\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ldots$ b) $3x^2;\ \frac{9}{4};\ \frac{27}{16x^2};\ \frac{81}{64x^4};\ldots$

**Aufgabe 1.4:** Von einer geometrischen Folge $\{\ a_k\ \}$ sind

| | gegeben | und gesucht |
|---|---|---|
| a) | $a_1 = 4;\ q = 0,5$ | $a_{10};\ s_{10}$ |
| b) | $a_1 = 2;\ a_n = 1024;\ q = 2$ | $n$ |
| c) | $a_1 = 4;\ q = 2;\ s_n = 252$ | $a_n;\ n$ |

**Aufgabe 1.5:** Berechnen Sie die fehlenden Stücke einer geometrischen Folge $\{a_k\}$

| | $a_1$ | $q$ | $n$ | $a_n$ | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 320 | 0,4 | 12 | | |
| b) | 3 | | 5 | 48 | |
| c) | 20 | 1,2 | | 59,72 | |
| d) | 8 | 3 | | | 2912 |

**Aufgabe 1.6:** Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie!

a) $a_n = \frac{3^n}{n!}$ b) $a_n = (-1)^n \cdot (1 - n^{-2})$ c) $a_n = \frac{2n}{n!}$

**Aufgabe 1.7:** Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{10}{k}$ b) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{7}{k^2}$ c) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{50}{2^k}$ d) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{4+6k}{1-2k}$

e) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3-7k^2}{5k^2}$ f) $\lim\limits_{k\to\infty} 3\frac{k^2+2}{4k}$ g) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{-7}{k^2+1}$ h) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{4-9k}{5k^2}$

i) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2-1}{k-1}$ j) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{k^2-1}$ k) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{8k^2-4k+5}{-2k^2-4k+4}$

**Aufgabe 1.8:** Man berechne (falls möglich):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n + 1\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{2n^5}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,99^n$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} 1+(-1)^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n}$

**Aufgabe 1.9:** Man berechne (falls möglich):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n(1-n^{-2})$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\frac{2\pi}{3n}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{1,001^n}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi)$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n}$

---

**Aufgabe 2.1:** Beim schiefen Wurf eines punktförmigen Körpers, der nur der Schwerkraft unterliegt, gilt für die Bahnkurve $C$ die Parameterdarstellung:

$x = v_0 t\cos\varphi_0$ ($t$ – Zeitparameter) $y = v_0 t\sin\varphi_0 - \frac{1}{2}gt^2$ ($g$ – Erdbeschleunigung)

$v_0, \varphi_0$ (Geschwindigkeit bzw. Neigungswinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)

Wie lautet $C$ in kartesischen Koordinaten? Um welche Kurve handelt es sich?

**Aufgabe 2.2:** Man gebe $C:\ x^2 - 4x + y^2 = 0$ in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ an! Veranschaulichen Sie sich diese Darstellung in Verbindung mit einer Skizze des Kurvenverlaufs! Bei welcher Lage des Pols wird $r = r(\varphi)$ besonders einfach?

**Aufgabe 2.3:** Eine Funktion ist durch die Parametergleichung

$$x(t) = 0,5t;\quad y(t) = \sqrt{t} + t - 2;\quad t > 0$$

definiert. Stellen Sie die Funktion explizit, d.h. in der Form $y = y(x)$ dar und skizzieren Sie den Funktionsverlauf im Intervall $0 < t < 15$ (Schrittweite: $\Delta t = 1$). Welche Koordinaten gehören zu den Parameterwerten $t_1 = 1,5$ und $t_2 = 5$?

**Aufgabe 2.4:** Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen!

1a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = x^2 + 2$ d) $y = (x+2)^2 - 3$ e) $y = x^2 + 4x - 1$

2a) $y = 3x + 2$ b) $y = 2$ c) $y = |x-4| - 1$

5a) $y = 2x^3$ b) $y = x^3 + 2$ c) $y = (x-1)^3 + 2$

6a) $y = 2\sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{4x}$ c) $y = \sqrt{x+2} - 1$

7a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = \frac{1}{x+1} + 2$

**Aufgabe 2.5:** Der Graph der Funktion $y = x^2 - \sin x + 3$ wird verschoben:

a) um drei Einheiten in positiver $x$-Richtung und zwei Einheiten in negativer $y$-Richtung,

b) um jeweils 5 Einheiten in postitiver $x$-Richtung und $y$-Richtung.

Geben Sie in beiden Fällen die neue Funktionsgleichung an!

**Aufgabe 2.6:** Welche der Funktionen aus Aufgabe 2.4 sind gerade, welche sind ungerade?

**Aufgabe 2.7:** Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen!

a) $y = 4x^2 - 16$ b) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ c) $y = \sin x \cos x$ d) $y = |x^2 - 4|$

e) $y = \frac{x^2-1}{1+x^2}$ f) $y = \sqrt{x^2 - 25}$ g) $y = \frac{1}{1-x}$ h) $y = 4\sin^2 x$

**Aufgabe 2.8:** Welche Periode haben die Funktionen

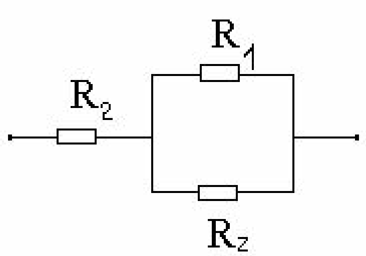
a) $y = \sin x + \cos x$ b) $y = \sin x \cos x$ c) $y = \tan 2x$?

**Aufgabe 2.9:** Die Form eines zwischen zwei gleichhohen Masten aufgehängten Seiles wird durch folgende Gleichung beschrieben: $y = a \cosh \frac{x}{a}$

a) Welche Bedeutung hat der Parameter $a$ ?

b) Berechnen Sie für $a = 80\ m$ den Seildurchhang an seiner tiefsten Stelle, wenn die Masten den Abstand $2b$ haben!

**Aufgabe 2.10:** Drei Widerstände $R_1$ , $R_2$ , $R_Z$ sind gemäß Abbildung verschaltet. Bestimmen Sie für $R_1 = 2\ \Omega$ , $R_2 = 3\Omega$ den Variationsbereich des resultierenden Widerstandes $R$, sofern $R_Z$ stufenlos von 0 bis $\infty$ veränderlich ist!




**Aufgabe 2.11:** Stellen Sie die Funktion als Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion dar!

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

**Aufgabe 2.12:** Zerlegen Sie die Funktion $f(x) = \frac{19x + 9}{x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2}$ in eine Summe von Partialbrüchen!

**Aufgabe 2.13:** Welche der folgenden Funktionen stellen schon Partialbrüche dar, welche müssten erst in eine Summe von solchen zerlegt werden?

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{(x-4)^3}$ e) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}$ f) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+4)^2}$

**Aufgabe 2.14:** Vorgelegt ist das Polynom $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ .

Berechnen Sie die Funktionswerte für $x_1 = -2$ , $x_2 = 1$ , $x_3 = 3$ und benutzen Sie hierzu das Hornerschema! Bestimmen Sie alle Wurzeln der Gleichung $P(x) = 0$. Man gebe $P(x)$ in Produktdarstellung an!

**Aufgabe 2.15:** Geben Sie für folgende Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich an!

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x-y}$ b) $f(x,y) = \sqrt{y \cdot \sin x}$

c) $f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)}$ d) $f(x,y) = \ln(-x^2 + y)$

**Aufgabe 2.16:** Wo sind die Funktionen unstetig?

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

---

**Aufgabe 3.1:** Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen die erste Ableitung!

1. $y = \frac{x\sin x}{x^2-1}$ 2. $y = \sqrt{\sin(4x)}$ 3. $y = \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}$ 4. $y = x^{\sin x}$

5. $y = \frac{x}{3x-1} + x^2\sqrt{2x-1}$ 6. $y = x(\ln x)^2$ 7. $y = x^2 e^{-x^2} + e^x \cos x$

8. $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 9. $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} ln \tan\frac{x}{2}$ 10. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

11. $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ 12. $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ 13. $y = \arcsin\frac{1}{x}$

14. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ 15. $y = x^{\sqrt{x}}$ 16. $y = \frac{1}{\ln x}$

17. $y = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}$ 18. $y = \sqrt[3]{(2x+1)^2}$ 19. $y = e^{ax}\cos(bx)$

20. $y = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ 21. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ 22. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

23. $y = |2x|$ 24. $y = \cos^2 x + \sin|x|$ 25. $y = 2x\sinh(x^2)$

**Aufgabe 3.2:** Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $y = 10x^{-3} - 3\ln x + \cos x$ b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ c) $y = 4^{x\ln x}$

d) $y = e^{x\sin x}$ e) $x^2 = y^3$ f) $y^3 - 2xy^2 = \frac{1}{x}$

g) $(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) = y^2$

**Aufgabe 3.3:** Geben Sie die erste Ableitung und für a) und b) auch das Differential zu einem beliebigen Zuwachs $dx$ der Funktion an einer beliebigen Stelle $x$ des Definitionsbereiches an!

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+4)^2}$ e) $f(x) = xe^x$ f) $f(x) = \ln(x^2+1)$

**Aufgabe 3.4:** Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x^2-1}$ an den Stellen $x_0 = \frac{\pi}{16}$ und $x_1 = \frac{\pi}{8}$ ?

**Aufgabe 3.5:** Für eine Wechselspannung $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ sei $u_0 = 220V$, $\omega = 0,1\pi(m\,s)^{-1}$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Gemessen wurde $t_1 = (5,0 \pm 0,1)ms$ . Man berechne näherungsweise den absoluten und relativen Fehler der Spannung mit Hilfe des Differentials.

**Aufgabe 3.6:** Man gebe die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = 2x^2 - 6x + 7$ im Punkt $(1;3)$ an!

**Aufgabe 3.7:** Wo verlaufen die Tangenten an die Kurve von $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ parallel zur Geraden $y = 0,25x - 2$ ?

**Aufgabe 3.8:** Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l’ Hospital die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^4-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} [(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (1-e^{-x})^x$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$, $(a > 0)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

**Aufgabe 3.9:** Bestimmen Sie die absoluten und relativen Extrema der Funktionen!

a) $y = x^3 - 3x + 3,\quad x \in \left[-3, \frac{3}{2}\right]$ b) $y = \frac{x-1}{x+1},\quad x \in [0,4]$

**Aufgabe 3.10:** Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = (x-2)^8$ an der Stelle $x_0 = 2$ ein Extremum oder einen Horizontalwendepunkt hat!

**Aufgabe 3.11:** Geben Sie die (größtmöglichen) Definitionsbereiche und die relativen Extrema folgender Funktionen an:

a) $y = \frac{x}{\ln x}$ b) $y = x\sqrt{1-x}$

**Aufgabe 3.12:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x}{1-e^x}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{3 \cdot \tan x}{\sin(2x)}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{\sin 4x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} (1-e^{-x})^x$

**Aufgabe 3.13:** Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (2x)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \cdot \ln x)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-x} \cdot \sqrt{x})$ e) $\lim\limits_{x\to\pi} (x-\pi) \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

**Aufgabe 3.14:** Geben Sie die Anstiege der Tangenten an die in Parameterform gegebenen Kurven an!

a) $x = \sqrt{t}, y = \sqrt{t+1}, t \geq 0$ b) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$

**Aufgabe 3.15:** Geben Sie die Anstiege der Tangenten an die in Polarkoordinaten gegebenen Kurven in Abhängigkeit vom Winkel φ an!

a) $r = e^{\varphi}$ b) $r = e^{\varphi}\sin\varphi$ c) $r = \frac{1}{\varphi}$

**Aufgabe 3.16:** Wo hat die logarithmische Spirale $r = e^{\varphi}$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ Punkte mit waagerechter bzw. vertikaler Tangente?

**Aufgabe 3.17:** Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Zykloide $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ im Punkt $(x_0; y_0)$ an, für den $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ist! Geben Sie die Krümmung und den Krümmungsradius im selben Punkt an!

**Aufgabe 3.18:** Informieren Sie sich durch eine ausführliche Kurvendiskussion über die Eigenschaften (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, asymptotisches Verhalten usw. ) der Funktion $y = \frac{(x-3)^2}{x-1}$ !

**Aufgabe 3.19:** Diskutieren Sie die Funktionen

a) $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ b) $y = \frac{(x-2)^2}{x+2}$ c) $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ d) $f(t) = 4(e^{-t} - e^{-3t}),\ t \geq 0$

**Aufgabe 3.20:** Für die Beleuchtungsstärke $E$ in einem Punkt P einer von einer Lampe beleuchteten ebenen Fläche gilt

$E = \frac{I \cdot \sin\alpha}{a^2}$. Dabei ist $I$ die konstante Lichtstärke der Lampe, $\alpha$ der Einfallswinkel des Lichtes und $a$ der Abstand des Punktes P von der Lampe.

In welcher Höhe $h$ über der Mitte eines kreisförmigen Tisches des Radius $r$ muß eine Lampe angebracht werden, damit die Beleuchtungsstärke am Rande des Tisches maximal wird?

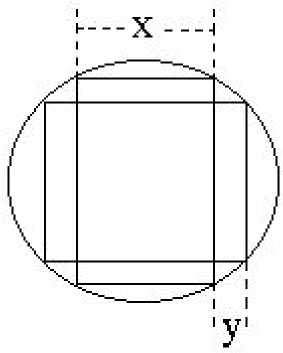
**Aufgabe 3.21:** Der Benzinverbrauch $y$ (in Liter pro 100 km) eines Pkw hängt von der Fahrgeschwindigkeit $x$ (in km/h) wie folgt ab:

$$y = \frac{x}{10} + \frac{250}{x} - 5$$

Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch minimal?

**Aufgabe 3.22:** Wieviel Blech ist zur Anfertigung eines oben offenen zylindrischen Litermaßes mindestens erforderlich?

**Aufgabe 3.23:** In das Innere einer kreiszylindrischen Spule (Querschnittsradius $R$) soll ein Eisenkern gebracht werden, dessen Profil die Form eines Kreuzes hat. Welche Abmessungen x, y (siehe Abb.) muss der Querschnitt des Eisenkerns haben, wenn sein Flächeninhalt A maximal werden soll ? Wie groß ist $A_{\max}$ ?




---

**Aufgabe 4.1:** Berechnen Sie

a) $\int \frac{3-5x+7x^3}{x^4}dx\ (x \neq 0)$ b) $\int (2-x)^3 dx$ c) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx\ (x \geq 0)$

d) $\int \frac{6-x^2\sqrt[3]{x}}{3x}dx\ (x > 0)$ e) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

**Aufgabe 4.2:** Wie lautet die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu

a) $f(x) = x^2 \sin x$ b) $f(x) = \arccos x,\ (|x| \leq 1)$ c) $f(x) = e^x \sin x$

d) $f(x) = \ln x\ (x > 0)$ e) $f(x) = x \ln|x|\ (x \neq 0)$ f) $f(x) = \ln(1+x^2)$

**Aufgabe 4.3:** Berechnen Sie durch geeignete Substitutionen

a) $\int \cos \frac{x}{3} dx$ b) $\int \frac{dx}{(2-x)^3},\ (x \neq 2)$ c) $\int \sqrt[3]{5x-1}\, dx\ \left(x \geq \frac{1}{5}\right)$

d) $\int x \sin(x^2) dx$ e) $\int \frac{3x^2}{2+x^3}dx \left(x \neq -\sqrt[3]{2}\right)$ f) $\int x\sqrt{x^2-1}\, dx,\ (|x| \geq 1)$

g) $\int \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}dx,\ (x \neq 1)$ h) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\, \sin(2x)dx$

**Aufgabe 4.4:** Gesucht sind alle Funktionen $F(x)$, deren erste Ableitungen $F'(x) = f(x)$ gegeben sind:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ b) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$ c) $f(x) = \frac{3x+2}{x(x+1)^3}$

**Aufgabe 4.5:** Berechnen Sie (mit Formelsammlung) folgende Integrale und bringen Sie diese zuvor, falls erforderlich, in eine geeignete Gestalt!

a) $\int \sqrt{9-x^2}\, dx,\ (|x| \leq 3)$ b) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\, dx,\ (|x| \geq 2)$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}dx$

d) $\int \frac{x}{1+\cos 2x}dx,$ e) $\int \tan^2(4x)dx,$ f) $\int x^2 \cos(2x)dx$ g) $\int \frac{x^5-5x^3+9x}{(x^2+x-1)^2}dx$

**Aufgabe 4.6:** Berechnen Sie (evtl. mit Formelsammlung) die unbestimmten Integrale von folgenden Funktionen:

1. $y = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ 2. $y = \arctan x$ 3. $y = \sinh^2 x$

4. $y = \dfrac{1}{x^2(x^2+4)}$ 5. $y = \cot(4x)$ 6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

7. $y = (x^2+9)^{-\frac{3}{2}}$ 8. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ 9. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

**Aufgabe 4.7:** Welche Werte haben die bestimmten Integrale

a) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\ln x}^{\,3} dx$ b) $\int\limits_5^{12} \frac{2}{x^2-4} dx$ c) $\int\limits_0^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 dx$

d) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} \cos x dx$ e) $\int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos x + \cos^2 x) dx$ ?

**Aufgabe 4.8:** Berechnen Sie die Fläche zwischen $y = x+1$ und $y = x^2 - 6x + 11$ .

**Aufgabe 4.9:** Wie groß ist der Inhalt jener Fläche, die von Kurven mit den Gleichungen

$y = 1 + \sin x$ , $y = 1 - \frac{2x}{\pi}$ und $x = \pi$ berandet wird?

**Aufgabe 4.10:** Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn $y = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \sqrt{x}$ innerhalb der Nullstellen um die x-Achse rotiert!

**Aufgabe 4.11:** Man bestimme Flächeninhalt und Schwerpunkt des ersten Quadranten der Ellipse!

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$

**Aufgabe 4.12:** Rollt ein Kreis K auf einer Geraden ab, so beschreibt ein fester Punkt auf K bei dieser Bewegung eine Zykloide. Die Gleichung dieser Kurve in Parameterform (Vorlesung) ist:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi) .$$

Man berechne ihre Bogenlänge bei einer vollen Umdrehung ($0 \le \varphi \le 2\pi$) des erzeugenden Kreises (Radius $a$)!

**Aufgabe 4.13:** Warum handelt es sich bei den folgenden Aufgaben um uneigentliche Integrale? Deren Werte sind zu berechnen!

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ 2. $\int\limits_0^2 \ln|1-x| dx$ 3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 5. $\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\cos(wt)dt, \ (w \in \mathbb{R})$

**Aufgabe 4.14:** Ermitteln Sie die zu $f(x)$ gehörige Stammfunktion, die durch den angegebenen Punkt $P(x;\ y)$ verläuft!

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ , $P(e; 4)$ b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ , $P(-2; 10)$

**Aufgabe 4.15:** Ermitteln Sie durch Partialbruchzerlegung

a) $\int \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} dx$ b) $\int \frac{19x+9}{x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2} dx$ c) $\int \frac{x^4 - 31x^2 + 42x + 72}{(x+1)^2(x-3)(x-1)} dx$

**Aufgabe 4.16:** Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Kurvenstückes $y = \sqrt{x^2 - 9}$ , $3 \le x \le 5$ um die

a) $x$ –Achse b) $y$ –Achse entsteht!

**Aufgabe 4.17**: Wo liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = \ln x,\ 1 \le x \le e$ , um die $x$-Achse entsteht?

---

**Kurz-Lösungen**

**1.1:** a) $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ; $\frac{1}{16}$ ; $\left(-\frac{1}{64}\right)$ ; $\frac{1}{256}$ b) 19; 7; 5,25; 5 c) $0,05;\ -0,01;\ 0,0015;\ -0,0002$

d) 2; $\frac{7}{2}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{13}{4}$ e) 1; 0; $-1$; 0 f) 0; $-\frac{4}{3}$; 0; $\frac{8}{5}$

**1.2:** a) $a_7 = -6$ $s_{20} = -260$

b) $a_7 = 6$ $s_{20} = 15$ c) $a_7 = 12$ $s_{20} = \frac{1000}{3}$

**1.3:** a) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $q = \frac{3}{4x^2}$

**1.4:** a) $a_{10} = 0,0078;$ $s_{10} = 7,9922$ b) $n = 10$ c) $n = 6;$ $a_n = 128$

**1.5:** a) $a_{12} = 0,01342;$ $s_{12} = 533,324$ b) $q = 2;$ $s_5 = 93$

c) $n = 7;$ $s_7 = 258,32$ d) $n = 6;$ $a_6 = 1944$

**1.6:** a) monoton fallend für n>3 b)ist alternierend, also nicht monoton c) monoton fallend

**1.7:** a) 0 b) 0 c) 0 d) -3 e) - $\frac{7}{5}$ f) div. g) 0 h) 0 i) div. j) 0 k) -4

**1.8:** a) $\infty$ b) 3 c) 0 d) 0 e) unbest. div .f) 2

**1.9:**a) 0 b) unbest. div. c) 0 d) 3 e) 0 g) $e^{-2}$ h) $\frac{1}{e}$ i) 0 j) $e^3$

**2.1:** $t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi_0}$, $(0° \le \varphi_0 < 90°)$ ,eingesetzt in $y = y(t)$ , ergibt:

$y = x \tan \varphi_0 - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos \varphi_0}\right)^2$ kartesische Darstellung der Kurve $C$

Mit quadratischer Ergänzung kann sie (von Könnern) umgeformt werden in

$y - y_0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi_0}(x - x_0)^2$ mit $x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi_0}{2g}$ , $y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{2g}$

Das ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $(x_0, y_0)$

**2.2:** $C : (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ Kreis mit $M(2,0)$ und $R = 2$ handelt.

$x = r \cos \varphi$ , $y = r \sin \varphi \Rightarrow r^2 - 4r \cos \varphi = 0,\ (r \ge 0)$

$\Rightarrow r(\varphi) = 4 \cos \varphi$ , $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (wegen $r \ge 0$).

Mit $x_0 = 2,\ y_0 = 0$ als Pol des Polarkoordinatensystems (d.h. $x = 2 + r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$)

$\Rightarrow$ $r(\varphi) = 2\ \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$

**2.3:** $t_1 = 1,5 \Rightarrow x_1 = 0,75 \wedge\ y_1 = 0,725$ $t_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 2,5 \wedge y_2 = 5,236$

**2.5:** a) $y+2 = (x-3)^2 - \sin(x-3)+3$ b) $y-5 = (x-5)^2 - \sin(x-5)+3$

**2.6:** 1a), b), c) ; 2b) sind gerade Funktionen

3b), c) ; 5a) ; 7a), b) sind ungerade Funktionen

**2.7:** gerade: a), d), e), f), h) ungerade: b), c)

g) symmetrisch bezüglich Punkt (1;0)

**2.8:** a) $p = 2\pi$ b) $p = \pi$ c) $p = \frac{\pi}{2}$

**2.9:** a) $a$ ist die kürzeste Entfernung zur $x$-Achse

b) $H = a\cosh\frac{b}{a} - a = 80(\cosh\frac{b}{80} - 1)$

**2.10:** $R$ ist als Funktion von $R_z$ monoton steigend und hat den Wertebereich $W_R = [3\Omega, 5\Omega)$

**2.11:** $f(x) = x^2 - 1 - \frac{2x}{(x-1)^2}$

**2.12:** $f(x) = \frac{7}{x-1} - \frac{3}{5x+5} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{32x-21}{5(x^2-2x+2)}$

**2.13:** a), d), f) muss zerlegt werden b), c), e) ist ein Partialbruch

**2.14:** $P(-2) = -30,\quad P(1) = 0,\quad P(3) = 50,$

Wurzeln von $P(x) = 0$ sind : $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1-j\sqrt{31}}{4},\ x_3 = -\frac{1+j\sqrt{31}}{4}$

$$P(x) = (x-1)(2x^2+x+4) = 2(x-1)\left(x + \frac{1-j\sqrt{31}}{4}\right)\left(x + \frac{1+j\sqrt{31}}{4}\right)$$

**2.15:** a) $D = \{(x;y) : x+y \le 1\}$ $W = \{z : 0 \le z < \infty\}$

b) $D = \{(x;y) : y \cdot \sin x \ge 0\}$ $W = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

c) $D = \{(x;y) : x = y\}$ $W = \{1\}$

d) $D = \{(x;y) : y > x^2\}$ $W = \mathbb{R}$

**2.16:** Unstetig auf

a) der Geraden $y = x$ b) dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ c) den Geraden $y = \pm x$

**3.1:** 1. $y' = \frac{x}{x^2-1}\cos x - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\sin x$ 2. $y' = \frac{2\cos(4x)}{\sqrt{\sin(4x)}}$

3. $y' = \frac{5}{2|2x+1|\sqrt{(x-2)(2x+1)}}$ 4. $y' = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right)$

5. $y' = -\frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{5x^2-2x}{\sqrt{2x-1}}$ 6. $y' = 2\ln x + (\ln x)^2$

7. $y' = 2x(1-x^2)e^{-x^2} + e^x(\cos x - \sin x)$ 8. $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}} = -\frac{2sgnx}{1+x^2}\ (x \ne 0)$

9. $y' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ 10. $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$ 11. $y' = -\frac{1}{\cos x}$

12. $y' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ 13. $y' = -\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{sgnx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $(|x| > 1)$

14. Für $x > 0$ folgt aus $y = x^{\frac{7}{8}}$ : $y' = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\cdot\sqrt[8]{x}}$

15. $y' = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}$ 16. $y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$ 17. $y' = \frac{3}{x(x^2+3)}$

18. $y = |2x+1|^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}\cdot\frac{sgn(2x+1)}{\sqrt[3]{|2x+1|}}$, $\left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$

19. $y' = [a\cos(bx) - b\sin(bx)]e^{ax}$ 20. $y' = \frac{2x^3}{1-x^4}$

21. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2sgn(1-x^2)}{1+x^2}$

22. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 23. $y' = 2sgnx\ (x \neq 0)$

24. $y' = -\sin(2x) + \cos|x|\cdot sgnx$ 25. $y' = 4x^2\cosh(x^2) + 2\sinh(x^2)$

**3.2:** a) $y' = -30x^{-4} - \frac{3}{x} - \sin x$ b) $y' = \frac{1-2\ \ln x}{x^3}$

c) $y' = 4^{x\cdot\ln x}(\ln 4)\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$ d) $y' = e^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$

e) $y' = \frac{2x}{3y^2}$ f) $3y^2y' - 2y^2 - 4xyy' = -\frac{1}{x^2}$

g) $2(x^2+y^2)(2x+2yy') - 2(x^2+y^2) - 2x(2x+2yy') = 2yy'$

**3.3:** a) $df(x) = f'(x)\cdot dx = \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}\cdot dx$ b) $df(x) = f'(x)\cdot dx = -\frac{1}{(x+1)^2}\cdot dx$

c) $f'(x) = \frac{-x^2+2x+4}{(x^2+4)^2}$ d) $f'(x) = \frac{-2x^3+12x}{(x^2+4)^3}$

e) $f'(x) = (1+x)e^x$ f) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

**3.4:** $f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = -0{,}42$ $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1{,}05$

**3.5:** $\Delta u = -(\pm 6{,}0)V$ $\delta u = -(\pm 5{,}4)\%$

**3.6:** $y(x) = 4x - 6$ , $y(1) = -2 \Rightarrow y_T = -2x + 5$

**3.7:** $P_1(1{,}12;-0{,}65)$, $P_2 = (-1{,}12;0{,}65)$

**3.8:** a) $\frac{1}{4}$ b) 2 c) $\frac{2}{\pi}$ d) 1 e) $\ln a - 1$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{3}$

**3.9:** a) Absolutes Minimum: $P_{a\min}(-3;-15)$ Absolutes Maximum: $P_{a\max}(-1;5)$

Relatives Minimum: $P_{\min}(1;1)$ Relatives Maximum: $P_{\max}(-1;5)$

b) Keine rel. Extrema, aber abs. Min. in $P_{\min}(0;-1)$ und abs. Max. in $P_{\max}(4;\frac{3}{5})$

**3.10:** Wegen $y'(2) = y''(2) = \ldots = y^{(7)}(2) = 0 \wedge y^{(8)}(2) = 8! > 0$ (geradzahlige Ableitung!) hat $y = f(x)$ bei $x_0 = 2$ ein relatives Minimum.

**3.11:** a) $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$, $\quad P_E(e;e)$ rel. Min.

b) $D_f = (-\infty,1]$, $\quad P_E(\frac{2}{3};\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}})$ rel. Max.

**3.12:** a) 1 b) 0 c) 1 d) $-1$ e) $na^{n-1}$ f) 0

g) $\frac{3}{2}$ h) 1 i) 0 j) 2 k) $\frac{1}{2}$ l) 1

**3.13:** a) 1 b) 1 c) 0 d) 0 e) -2

**3.14:** a) $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$ b) $y = -\tan t$

**3.15:** a) $y' = \dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$ b) $y' = \dfrac{\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}$

c) $y' = \dfrac{\sin\varphi - \varphi\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi + \varphi\cdot\sin\varphi}$

**3.16:** Tangenten waagerecht: $\varphi_1 = \frac{3}{4}\pi$ ; $\varphi_2 = \frac{7}{4}\pi$

senkrecht: $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$ ; $\varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$

**3.17:** $y_T(x) = x + 2a - \frac{a\pi}{2}$ , $\quad \kappa = -\frac{\sqrt{8}}{8a}$ , $\quad \rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| = \sqrt{8}\cdot a$

**3.18:** $y_s = -9$, $x_{N1/2} = 3$: (Doppel- Nullstelle)

Polstelle: $x_P = 1$ (einfacher Pol) Pol-Asymptote: $x_{As} = 1$

Polynomdivision: $y = x - 5 + \frac{4}{x-1}$

Grenzkurve für $x \to \infty$: $y_{As} = x - 5$

keine Wendepkt.; rel. Max. in $P_{E2}(-1;-8)$; rel. Min. in $P_{E1}(3;0)$

**3.19:**

a) $x_{N1/2} = \pm 2$, $y(0) = -4$ $\quad y = 1 - \frac{5}{x^2+1} \Rightarrow y_{As} = 1$, keine Unstetigkeiten

$P_{\min}(0;-4)$, $\quad P_{W1/2}(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3};-\frac{11}{4})$

b) $x_{N1;2} = 2$, $y(0) = 2$, $\quad y_{As} = x - 6$, $\quad x_P = -2$, $\quad \lim\limits_{x\to-2\pm0} = \pm\infty$

$P_{\min}(2;0)$, $\quad P_{\max}(-6;-16)$ keine Wendepkt.

c) $x_{N1;2} = 1$, $y(0) = 1$, $\quad y_{As} = x - 3$, $\quad x_P = -1$, $\quad \lim\limits_{x\to-1\pm0} = \pm\infty$

$P_{\min}(1;0)$, $\quad P_{\max}(-3;-8)$ keine Wendepkt.

d) $f(0) = 0$ Keine weitere Nullstelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$P_{\max}(\ln\sqrt{3}\,;\,\frac{8}{9}\sqrt{3})\qquad P_W(\ln 3;\,\frac{32}{27})$

**3.20:** Wenn die Lampe in einer Höhe von $h_E = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot r$ über der Tischplatte angebracht wird, ist die Beleuchtungsstärke am Rand maximal: $E_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot I}{9r^2}$ .

**3.21:** Ein minimaler Verbrauch wird bei $x = 50$ km/h erzielt.

**3.22:** $r_E = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{\pi}}\ cm = 6{,}83\ cm \qquad h_E = \dfrac{1000\ cm^3}{\pi r_E^2} = r_E = 6{,}83\ cm$

$A_{OF}(r_E) = 439{,}7\ cm^2$

**3.23:** $x_{\max} = R\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}05R\ , \qquad y_{\max} = R\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = 0{,}33R$

$A_{\max} = \left(2\sqrt{5}-2\right)R^2 \qquad (A_{\max} = 2{,}47R^2)$

**4.1:** a) $\int \dfrac{3-5x+7x^3}{x^4}dx = -\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{2x^2}+7\ln|x| \quad (x \neq 0)$

b) $\int(2-x)^3dx = -\dfrac{1}{4}(2-x)^4$ c) $\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \dfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} \quad (x \geq 0)$

d) $\int \frac{6-x^2\sqrt[3]{x}}{3x}dx = 2\ln|x| - \dfrac{1}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}\ (x > 0)$ e) $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}dx = \dfrac{x^3}{3} - x + \arctan x$

**4.2:** Berechnung durch partielle Integration

a) $\int x^2\sin x dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + c$

b) $\int\arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c, \quad (|x| \leq 1)$

c) $\int e^x\sin x dx = \dfrac{\sin x - \cos x}{2}e^x + c$

d) $\int\ln x dx = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c,\ (x > 0)$

e) $\int x\ln|x|dx = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln|x| - \dfrac{1}{2}\right) + c,\ \ (x \neq 0)$

f) $\int\ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + c$

**4.3:** a) $\int\cos\dfrac{x}{3}dx = 3\sin\dfrac{x}{3},\ (\ \dfrac{x}{3} = t\ )$

b) $\int\dfrac{dx}{(2-x)^3} = \dfrac{1}{2(2-x)^2}\ (x \neq 2), \quad (2-x = t)$

c) $\int\sqrt[3]{5x-1}\,dx = \dfrac{3}{20}\sqrt[3]{5x-1}^{\,4}, \quad \left(x \geq \dfrac{1}{5}\right),\ (5x-1 = t)$

d) $\int x\sin(x^2)dx = -\dfrac{1}{2}\cos(x^2)$ e) $\int\dfrac{3x^2}{2+x^3}dx = \ln|2+x^3|, \quad \left(x \neq -\sqrt[3]{2}\right)$

f) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3, \quad (|x| \geq 1), \qquad (t = x^2-1)$

g) $\int\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}dx = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} - \ln|x-1|, \qquad (t = 1-x)$

h) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)dx = -\frac{2}{9}\sqrt{1+3\cos^2 x}^{\,3}, \qquad (t = 1+3\cos^2 x)$

**4.4:** Partialbruchzerlegung

a) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx = 3\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = 3\ln|x-2| - \ln|x-1| + c$

b) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + c$

c) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right)dx$

$= \ln\frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

**4.5:** a) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right)$

b) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{x^3-2x}{4}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{16+x^2}\right)$

d) $\int \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}(x\tan x + \ln|\cos x|)$

e) $\int \tan^2(4x)dx = \frac{1}{4}\tan(4x) - x$

f) $\int x^2\cos(2x)dx = \frac{2x^2-1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x$

g) $\int \frac{x^5-5x^3+9x}{(x^2+x-1)^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x^2+x-1}$

**4.6:** 1. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = -\frac{1}{1+\sin x}$

2. $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

3. $\int \sinh^2 x\,dx = \frac{\sinh(2x)}{4} - \frac{x}{2}$

4. Partialbruchzerlegung $\frac{1}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+4}\right)$

5. $\int \cot(4x)dx = \int \frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}dx = \frac{1}{4}\ln|\sin(4x)|$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}^{\,3}} = \frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}$

8. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$

$9. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln(1+\sin x) - \ln(\cos x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

**4.7:** a) $\frac{2}{5}(\ln x)^{\frac{5}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{5}\sqrt{\ln 2}^{\,5} \approx 0{,}16$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{x+2}\Big|_5^{12} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3} \approx 0{,}2554$

c) $\frac{(2+x)^4}{32}\Big|_0^1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}03125$ d) 0 e) $\left[\frac{3x}{2} - 3\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = 3\pi$

**4.8:** $A = A_1 - A_2 = \frac{27}{6} = 4{,}5\ FE$

**4.9:** $A = (2+\pi)\ FE$

**4.10:** $V = \frac{3\pi}{4}\ VE$

**4.11:** $A = \frac{\pi ab}{4} FE,\quad x_s = \frac{4a}{3\pi}\ LE,\quad y_s = \frac{4b}{3\pi}\ LE$

**4.12:** $L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\ LE$

**4.13:** 1. 2  2. $-2$  3. $\frac{\pi}{2}$  4. $\frac{\pi}{2}$  5. $\frac{1}{1+w^2}$

**4.14:** a) $F(x) = 6\ln|x| - 2$  b) $F(x) = x^3 + x^2 - 2x + 10$

**4.15:** a) $\frac{1}{3}x^3 - x - \ln(x-1)^2 + \frac{2}{x-1} + C$

b) $7\ln|x-1| - \frac{3}{5}\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{16}{5}\ln|x^2-2x+2| - \frac{11}{5}\arctan(x-1) + C$

c) $x + \ln|x^2-1| + \frac{23}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

**4.16:** a) $46{,}08$  b) $180{,}1$

**4.17:** $V_x = \pi\int_1^e (\ln x)^2\,dx = 2{,}257 \qquad x_s = 2{,}224,\quad y_s = z_s = 0$