5. Determinanten

5.1 Determinanten der Ordnung 2 und 3

Als **Determinante der zweireihigen Matrix** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet man die Zahl

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Man verwendet auch die Bezeichnung $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Im zweiten Kapitel hatten wir einen solchen Ausdruck z.B. bereits im Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt zweier Vektoren kennen gelernt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Ausdrucks bedeutet geometrisch den **Flächeninhalt** des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Analog definiert man für **dreireihige Matrizen**

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Auch diesen Ausdruck hatten wir bereits im 2. Kapitel als Spatprodukt von drei Vektoren kennen gelernt. Sein Betrag bedeutet geometrisch das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds (Spats).

Beispiel:

$$a)\ \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - (-1)\cdot 7 = 1$$

$$b)\ \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -6 \\ 7 & -5 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 7 & -5 \end{matrix} = 2\cdot(-3)\cdot(-8) + 2\cdot(-6)\cdot 7 + 5\cdot 1\cdot(-5) - 5\cdot(-3)\cdot 7$$

$$- 2\cdot(-6)\cdot(-5) - 2\cdot 1\cdot(-8) = 0$$

(Regel von SARRUS)

5.2 Determinanten höherer Ordnung

Zur Verallgemeinerung des Begriffes der Determinante betrachten wir noch einmal eine Determinante der Ordnung 3 und führen die Berechnungsvorschrift zurück auf die für Determinanten 2. Ordnung:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Der Ausdruck $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ wird als **Adjunkte zum Element** a_{11} bezeichnet.

Der Ausdruck $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ wird als **Adjunkte zum Element** a_{12} bezeichnet.

Der Ausdruck $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ wird als **Adjunkte zum Element** a_{13} bezeichnet.

Man beachte die wechselnden Vorzeichen!

Die Zurückführung der Berechnung einer dreireihigen Determinante auf die Berechnung von zweireihigen Determinanten in der obigen Weise bezeichnet man als **Entwicklung der (dreireihigen) Determinante nach der** (in diesem Falle) **ersten Zeile**.

Allgemein bezeichnet man als **Adjunkte zum Element** a_{ik} diejenige **mit dem Faktor** $(-1)^{i+k}$ **versehene Unterdeterminante** $|U_{ik}|$, die man erhält, wenn man in der Ausgangsdeterminante die i –te Zeile und die k –te Spalte streicht.

Bemerkung: Man mache sich klar, dass die Entwicklung nach der 2. Zeile

$a_{21}(-1)^3|U_{21}| + a_{22}(-1)^4|U_{22}| + a_{23}(-1)^5|U_{23}|$

oder nach der 3. Zeile

$a_{31}(-1)^4|U_{31}| + a_{32}(-1)^5|U_{32}| + a_{33}(-1)^6|U_{33}|$,

aber auch nach der 1., 2. oder 3. Spalte zu dem gleichen Resultat führt!

Diese Überlegungen führen zur induktiven Definition einer **Determinante n-ter Ordnung.**

Entwicklung nach der i –ten Zeile:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |U_{ik}|$$

Entwicklung nach der k –ten Spalte:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |U_{ik}|.$$

Wir verzichten auf den Nachweis, dass unabhängig von der gewählten Zeile oder Spalte immer der gleiche Zahlenwert entsteht.

Man merkt schon, dass die tatsächliche Berechnung einer Determinante höherer Ordnung auf diese Weise unpraktikabel ist. Es würden sich bei einer n – reihigen Determinante $n!$ Multiplikationen ergeben!

Deshalb sind elegantere Verfahren gefragt. Zu diesen gelangt man, wenn man sich die Eigenschaften und die daraus resultierenden Rechenregeln klar macht.

5.3 Rechenregeln und Eigenschaften

Wir formulieren alle Regeln und Eigenschaften für Spalten. Alles gilt aber völlig analog auch für Zeilen.

1.Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Für zwei benachbarte Spalten ist das offensichtlich. Eine Vertauschung nicht benachbarter Spalten ist identisch mit einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen benachbarter Spalten.

2. Besteht eine Spalte nur aus Nullen, so ist auch die Determinante gleich Null.

Man braucht ja nur nach dieser Spalte zu entwickeln.

3. Sind A und B Matrizen gleicher Ordnung, die sich nur in der k –ten Spalte unterscheiden, so gilt

$$\det(A) + \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} + b_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} + b_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} + b_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dieser Sachverhalt lässt sich leicht durch Entwicklung nach der k –ten Spalte verifizieren.

Aber: Es gilt **nicht** $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$

4. Multipliziert man die k –te Spalte mit einem Faktor α, so ändert sich auch die Determinante um diesen Faktor α.

Auch dieser Sachverhalt lässt sich leicht durch Entwicklung nach der k –ten Spalte herleiten.

Schlussfolgerung: $\det(\alpha A) = \alpha^n A$

5. Sind in A zwei Spalten identisch, so ist $\det(A) = 0$.

Die Erklärung ist einfach: Wegen Regel 1 müsste sich bei Vertauschung dieser beiden Spalten das Vorzeichen ändern. Tatsächlich ändert sich aber die Determinante nicht, weil ja beide Spalten identisch sind.

6. Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ändert sich wegen 3., 4. und 5. die Determinante nicht:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} + \alpha a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} + \alpha a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} + \alpha a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \cdot 0$$

7. Ist A eine Dreiecksmatrix, so gilt $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$\Rightarrow \det(E) = 1$

8. Ohne Beweis: $\det(A) = \det(A^T)$

9. Ohne Beweis: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

5.4 Praktische Berechnung von Determinanten

Die obigen Regeln, insbesondere Regel 6, liefern die Möglichkeit zur praktischen Berechnung. Wie beim Gauss-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme bzw. zur Rangbestimmung von Matrizen wird die Determinante in eine Dreiecksgestalt gebracht. Hierbei können sogar die Operationen nicht nur mit Zeilen sondern auch mit Spalten erfolgen. Außerdem kann man die Schreibarbeit reduzieren, wenn man nach jedem Rechenschritt die Ordnung der Determinante durch Entwicklung nach der Pivotspalte (bzw. -zeile) um 1 erniedrigt.

5.5 Berechnung der inversen Matrix

Wir setzen jetzt zur Abkürzung für die Adjunkten $A_{ik} = (-1)^{i+k}|U_{ik}|$.

Während gemäß Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (1)$$

gilt, ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \det(B)$$

ebenfalss die Determinante einer Matrix B, die sich aber von A nur dadurch unterscheidet, dass die i –te Zeile ersetzt wurde durch die j –te Zeile. Dadurch kommt in B eine Zeile doppelt vor und so muss

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = 0 \qquad (2)$$

sein.

Damit kann man eine geschlossene Formel für die inverse Matrix von A angeben, falls $\det(A) \neq 0$ gilt:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T}$$

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Überprüfen von $AA^{-1} = E$ bzw. $A^{-1}A = E$ mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2).

Es ist klar, dass diese geschlossene Darstellung einer inversen Matrix nur für $n = 2$ und $n = 3$ praktische Bedeutung hat. Für größere n ist sie nur von theoretischer Bedeutung.

5.6 LGS und Determinanten (Cramersche Regel)

Liegt ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix vor und ist die Voraussetzung $\det(A) \neq 0$ erfüllt, so kann man die einzige Lösung des LGS geschlossen angeben:

$$A \cdot x = b \Rightarrow \boxed{x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}^T \cdot b}$$

Von praktischer Bedeutung ist diese Regel nur für $n = 2$ und evtl. $n = 3$. Man kann sie hierfür auch sehr einprägsam interpretieren:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix}^T \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

Jede der 3 Komponenten des Lösungsvektors (ohne den Vorfaktor $\frac{1}{\det(A)}$) lässt sich einprägsam als Determinante interpretieren, die entsteht, wenn man in A die entsprechende Spalte durch die rechte Seite b ersetzt:

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

5.7 Eigenwertprobleme für quadratische Matrizen

Bei der Hauptachsentransformation quadratischer Formen und bei der Lösung mancher

Differentialgleichungssysteme muss man Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix A berechnen.

Das Gleichungssystem $A \cdot x = \lambda \cdot x$ hat offensichtlich immer (unabhängig von λ) die triviale Lösung $x = 0$. Diese ist in der Regel uninteressant. Von Interesse sind solche λ-Werte, für die das Gleichungssystem **nichttriviale Lösungen** hat.

Definition: Die reelle oder komplexe Zahl λ heißt **Eigenwert der Matrix** A, wenn es Vektoren $x \neq 0$ gibt, so dass das Gleichungssystem

$$\boxed{A \cdot x = \lambda \cdot x}$$

erfüllt ist. Diese Lösungsvektoren x heißen dann **Eigenvektoren zum Eigenwert λ der Matrix** A.

Es ist klar, dass es zu jedem Eigenwert stets unendlich viele Eigenvektoren gibt, denn mit x ist auch jeder Vektor αx ein Eigenvektor.

Von einem **normierten Eigenvektor** x spricht man, wenn x ein Eigenvektor mit dem Betrag 1 ist.

Wie kann man nun Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen? Die Antwort findet man, wenn man die Definitionsgleichung etwas umstellt:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \Rightarrow A \cdot x - \lambda \cdot x = 0 \Rightarrow (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) \cdot x = 0$$

In der letzten Darstellung erkennt man ein homogenes lineares Gleichungssystem für x, das bekanntlich genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null ist.

Also erhält man

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$$

als Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte der Matrix A. Diese Gleichung wird auch als **charakteristische Gleichung der Matrix** A bezeichnet. Für eine Matrix der Ordnung n ist dies eine algebraische Gleichung vom Grade n.

Indem man nun einen Eigenwert in das homogene Gleichungssystem $(A - \lambda E) \cdot x = 0$ einsetzt, berechnet man die zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des Gleichungssystems.