4. Matrizen

4.1 Begriffe

In der anschaulichen Vektorrechnung ist u.a. die Frage von Interesse, was aus einem Punkt der Ebene bzw. des Raumes wird, wenn man das Koordinatensystem verschiebt oder dreht bzw. wenn man den Punkt an einer Geraden bzw. einer Ebene spiegelt.

Diese Vorgänge lassen sich übersichtlich mit Hilfe von Matrizen beschreiben.

Auch bei der Beschreibung verschiedener Sachverhalte bei LGS lassen sich vorteilhaft Matrizen verwenden.

Eine **Matrix** ist ein Schema (eine Tabelle) von m Zeilen und n Spalten, in dem (in der) $m \cdot n$ reelle Zahlen (**Elemente** der Matrix) in einer **bestimmten Reihenfolge** eingeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man spricht von einer **Matrix mit m Zeilen und n Spalten**.oder auch von einer **Matrix vom Typ (m,n)**.

Spezialfälle von Matrizen sind

a) Spaltenvektoren als Matrizen mit nur einer Spalte,

b) Zeilenvektoren als Matrizen mit nur einer Zeile,

c) die **Nullmatrix** vom Typ (m,n):

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

d) **quadratische Matrizen**, bei denen Zeilenzahl = Spaltenzahl ist (**m = n = Ordnung der Matrix)**); die Elemente $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$ bilden die **Hauptdiagonale** der Matrix;

e) **symmetrische Matrizen** als spezielle quadratische Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

(Die Elemente sind spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet: $a_{ik} = a_{ki}$);

f) obere bzw. untere **Dreiecksmatrizen** als spezielle quadratische Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

g) **Diagonalmatrizen** als spezielle Dreiecksmatrizen:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix};$$

h) **Einheitsmatrizen** (für jede Ordnung gibt es genau eine) als spezielle Diagonalmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Einheitsmatrix verwenden wir das Symbol E.

4.2 Operationen mit Matrizen

Die einfachen Operationen Transponieren, Addition/Subtraktion und Multiplikation mit reellen Zahlen lassen sich problemlos von Vektoren auf allgemeine Matrizen übertragen.

Transponieren: (Lässt sich immer durchführen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xRightarrow[\textit{Aus Spalten werden Zeilen}]{\textit{Aus Zeilen werden Spalten}} A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Eine symmetrische Matrix ist demzufolge charakterisiert durch } A^T = A}$.

Addition/Subtraktion: (Nur möglich, wenn A und B vom gleichen Typ sind!)

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit reeller Zahl: (Immer möglich!)

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Des weiteren kann man auch sinnvoll eine **Multiplikation von zwei Matrizen** A **und** B erklären. Diese basiert auf dem inneren Produkt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (Zeile1\ A) \circ (Spalte1\ B) & (Zeile1\ A) \circ (Spalte2\ B) & \dots & (Zeile1\ A) \circ (Spalte\ n\ B) \\ (Zeile2\ A) \circ (Spalte1\ B) & (Zeile2\ A) \circ (Spalte2\ B) & \dots & (Zeile2\ A) \circ (Spalte\ n\ B) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (Zeile\ m\ A) \circ (Spalte1\ B) & (Zeile\ m\ A) \circ (Spalte2\ B) & \dots & (Zeile\ m\ A) \circ (Sp\ n\ B) \end{pmatrix}$$

Das Produkt ist nur erklärt, wenn die Matrix A soviele Spalten hat wie die Matrix B Zeilen!

Man beachte, dass das Kommutativgesetz für die Matrizenmultiplikation nicht gilt!

Es gelten aber folgende Gesetze:

1.) $A(BC) = (AB)C$

2.) $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$

3.) $AE = A = EA$ (E ist dabei die Einheitsmatrix der jeweils richtigen Ordnung.)

4.) $(AB)^T = B^T A^T$ (Man beachte die "Vertauschung" der Faktoren!)

5.) Es gibt Matrizen $A \neq O$ und $B \neq O$, für die $AB = O$ oder $BA = O$ gilt. (**Nullteiler**)

4.3 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Ein LGS kann man auch im Matrizenkalkül angeben:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Kurzform: $\boxed{A \cdot x = b}$)

Dabei hat man die gegebenen Koeffizienten a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$ zur **Koeffizientenmatrix** und sowohl die **Absolutglieder (Störglieder)** $b_1, b_2, \ldots, b_m$ als auch die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu je einem Vektor x bzw. b zusammenfasst.

Auch andere Darstellungsformen und sich daraus ergebende Interpretationen sind möglich.

Im 3. Kapitel haben wir behauptet, dass ein LGS entweder

- genau eine oder

- unendlich viele oder

- keine einzige

Lösung hat, und wir haben jeden der 3 Fälle durch Beispiele belegt.

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass andere Fälle (z.B. genau 5 Lösungen) nicht möglich sind. Dies führen wir so aus, dass wir von zwei verschiedenen Lösungen ausgehen und zeigen, dass dann das LGS unendlich viele Lösungen haben muss.

Es seien also jetzt x und y ***zwei verschiedene*** *Lösungen eines LGS, d.h. es gilt*

$A \cdot x = b \quad$ *und* $\quad A \cdot y = b.$

Wir zeigen nun, dass jeder Vektor $z = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$, für den $\alpha + \beta = 1$ gilt, ebenfalls eine Lösung des LGS ist:

$A \cdot z = A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot (A \cdot x) + \beta \cdot (A \cdot y) = \alpha \cdot b + \beta \cdot b = (\alpha + \beta) \cdot b = 1 \cdot b = b$

4.4 Inverse Matrix

Wenn man die Darstellung eines Gleichungssystems durch die Matrizengleichung

$$A \cdot x = b$$

sieht, kann man leicht der Versuchung unterliegen, die "Lösung" des Systems in der Form

$$x = \frac{b}{A}$$

hinzuschreiben. Das ist natürlich **mathematischer Unsinn**, denn was soll wohl diese "Division" bedeuten?

Es gibt aber einige Spezialfälle, in denen man für die Matrix A eine zugehörige sogenannte **inverse Matrix** A^{-1} finden kann, für die

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A}$$

gilt.

In diesem Falle (und nur in diesem) kann man das LGS wie folgt lösen:

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}.$$

Man beachte, dass $x = b \cdot A^{-1}$ Unsinn wäre! (Warum?)

Die Frage nach der Existenz einer solchen inversen Matrix ist nur sinnvoll für quadratische Matrizen. Allerdings haben nicht alle quadratischen Matrizen eine Inverse!

Wie kann man nun feststellen, ob eine quadratische Matrix A eine Inverse besitzt oder nicht und wenn ja, wie kann man sie berechnen?

Es gibt zwei Möglichkeiten: Dies ist einmal der **Gauss-Algorithmus** (das führen wir gleich aus) und zum anderen eine Berechnung mittels **Determinanten (siehe Kapitel 5)**.

Wir suchen also jetzt für die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ eine unbekannte Matrix } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

die die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Im einzelnen sind dies n lineare Gleichungssysteme, die sich nur in den rechten Seiten unterscheiden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese kann man mit dem Gauss-Algorithmus lösen und zwar simultan, da ja die Koeffizientenmatrix bei allen dieselbe ist.

$\square$