3. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

3.1 Aufgabenstellung und Begriffe

Gesucht sind Werte für die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so dass die vorgegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

alle gleichzeitig erfüllt sind. Wenn **alle** b_i **gleich Null** sind, spricht man von einem **homogenen Gleichungssystem**. Anderenfalls (wenn also **mindestens ein** b_i **ungleich Null** ist) heißt das System **inhomogen**.

Anwendungen für solche LGS ergeben sich z.B. in folgenden Gebieten:

Gebiet	x_k	a_{ik}	b_i
Statik von Fachwerken	Knotenpunktlasten	Einflußzahlen	Stabkräfte
Elastizitätstheorie	Deformationen	elast. Konstanten	Spannungen
elektr. Netzwerke	Ströme	Widerstände	Spannungen
Kostenrechnung	Warenmengen	Kostenfaktoren	Kostenarten

(Siehe hierzu auch die Anwendungsbeispiele im Übungsband von PAPULA, Abschn. VI Lineare Algebra.)

Die gegebenen Zahlen a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n)$ heißen die **Koeffizienten des Systems** und werden zur sogenannten **Koeffizientenmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst.

Dies ist eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Man spricht auch von einer **Matrix vom Typ (m,n)**.

Analog fasst man die **Absolutglieder (Störglieder)** $b_1, b_2, \ldots, b_m$ und auch die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu je einem Spaltenvektor zusammen:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ein Vektor x, dessen Komponenten alle Gleichungen des Systems erfüllen, heißt **Lösungsvektor** des linearen Gleichungssystems.

Ausführlich werden wir uns mit Matrizen im 4. Kapitel befassen.

3.2 Aussagen über die Lösungsmenge eines LGS

Bereits im einfachsten Falle einer einzigen linearen Gleichung $a \cdot x = b$, die ja einen Spezialfall eines LGS darstellt, gibt es drei Möglichkeiten:

1. Fall: Es gibt genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{b}{a}$, wenn $a \neq 0$.

2. Fall: Es gibt keine Lösung, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$.

3. Fall: Es gibt unendlich viele Lösungen, wenn $a = 0$ und $b = 0$. Dann ist nämlich jede reelle Zahl x eine Lösung.

Diese drei Fälle - und nur diese - treten auch bei beliebigen LGS auf.

Dass es keine anderen als die genannten drei Fälle geben kann, werden wir im 3. Kapitel nachweisen.

Merke: Ein LGS hat entweder **genau eine** oder **unendlich viele** oder aber gar **keine Lösung**, wobei unter Lösung ein Lösungsvektor zu verstehen ist.

3.3 Eliminationsverfahren für LGS (nach GAUSS)

Die grundlegende Idee beruht auf der Tatsache, dass sich die Lösungsmenge eines LGS nicht verändert, wenn man folgende äquivalente Umformungen vornimmt:

- Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl

- Division einer Gleichung durch eine von Null verschiedene Zahl

- Addition einer Gleichung zu einer anderen (dabei bleibt eine der beiden unverändert.)

- Subtraktion einer Gleichung von einer anderen (dabei bleibt der Minuend unverändert.)

Mittels dieser äquivalenten Umformungen versucht man, das LGS in eine Gestalt zu bringen, aus der man die Lösungsmenge oder aber die Tatsache der Unlösbarkeit einfach ablesen kann. Die häufigsten Varianten des GAUSS-Algorithmus sind das klassische GAUSS-Verfahren und der das Verfahren von GAUSS-JORDAN.

Beim **klassischen GAUSS-Verfahren** ist in der ersten Etappe das Ziel der Umformungen ein **gestaffeltes** LGS:

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}^*x_1 + & a_{12}^*x_2 & +\ldots+ & a_{1r}^*x_r & a_{1,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{1n}^*x_n & = & b_1^* \\
& a_{22}^*x_2 & +\ldots+ & a_{2r}^*x_r & a_{2,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{2n}^*x_n & = & b_2^* \\
& & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
& & & a_{rr}^*x_r & a_{r,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{rn}^*x_n & = & b_r^*
\end{array}$$

In der zweiten Etappe (Rückwärtsrechnung) werden dann in umgekehrter Reihenfolge $x_r,\ x_{r-1},\ \ldots,\ x_1$ ermittelt (nachdem bereits für die frei wählbaren Variablen Parameter eingesetzt wurden: $x_{r+1} = t$ usw.).

Beim **GAUSS-JORDAN-Verfahren** ist das Ziel der Umformungen ein LGS in **kanonischer Gestalt**:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & & & +a_{1,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{1n}^*x_n & = & b_1^* \\
& x_2 & & +a_{2,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{2n}^*x_n & = & b_2^* \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots \\
& & x_r & +a_{r,r+1}^*x_{r+1} +\ldots+ a_{rn}^*x_n & = & b_r^*
\end{array}.$$

Um diese zu erreichen sind zwar mehr Operationen nötig, dafür kann man aber die Lösung(en) sofort ablesen.

Bemerkungen:

1. Das klassische Verfahren erfordert die wenigsten Rechenoperationen und lässt sich im Prinzip gut programmieren. Für die Handrechnung ist es wegen der Rückwärtsrechnung nicht so gut geeignet wie das GAUSS-JORDAN-Verfahren.

2. Beide Algorithmen führen in jedem Falle zum Ziel; d.h. man kann am Ende die einzige Lösung oder die unendliche Lösungsschar angeben oder aber feststellen, dass das LGS keine Lösung besitzt. Die folgenden Beispiele werden dies im Einzelnen untermauern.

3. Für den wichtigsten Spezialfall von LGS, bei denen die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt und kein Widerspruch vorliegt (d.h. es gibt genau eine Lösung), gibt es sehr viele spezielle Algorithmen (in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt der Koeffizientenmatrix). Auf diese gehen wir hier nicht ein.