2. Vektorrechnung

2.1 Begriffe

Von einem **Vektor** spricht man, wenn mehrere reelle (manchmal auch komplexe) **Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge** zusammengefasst werden.

Schreibt man die Zahlen untereinander, so spricht man von einem **Spaltenvektor:** $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Schreibt man die Zahlen nebeneinander, so spricht man von einem **Zeilenvektor:** $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Anstelle der trennenden Kommata bzw. Semikolons verwendet man auch Leerfelder.

Den Übergang von der Spalten- zur Zeilenschreibweise und umgekehrt bezeichnet man als **Transponieren**:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Rightarrow (a^T)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wir werden Vektoren bevorzugt als Spaltenvektoren schreiben.

Die einzelnen Zahlen, aus denen ein Vektor besteht, bezeichnet man als **Komponenten** des Vektors.

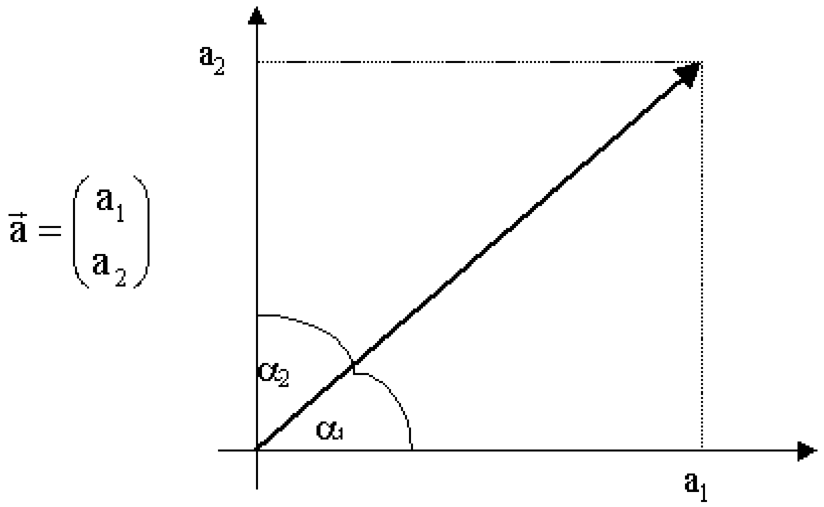
Alle Vektoren mit der gleichen Anzahl n von Komponenten, fasst man zusammen zu einem **Vektorraum** $\mathbb{R}^n$ (bei Spaltenvektoren) bzw. $\mathbb{R}_n$ (bei Zeilenvektoren).

Für $n = 2$ und $n = 3$ gibt es anschauliche Interpretationen für diese Vektoren und die Operationen mit ihnen. Diese spielen eine große Rolle in der Physik und in vielen Ingenieurfächern. Deshalb wollen wir uns in diesem Kapitel auf diese konzentrieren.

Um deutlich zu machen, dass wir uns in den anschaulichen Vektorräumen befinden, werden die Elemente des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ durch einen über das Symbol gezeichneten Pfeil gekennzeichnet:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$$

Grafisch kann man ihnen Verschiebungspfeile in der Ebene bzw. im Raum zuordnet:



α_1, α_2 werden als **Richtungswinkel** von $\vec{a}$ bezeichnet.

$\cos\alpha_1 = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$ und $\cos\alpha_2 = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$ werden als **Richtungskosinus** von $\vec{a}$ bezeichnet.

Jedem Vektor entspricht eine Klasse von Pfeilen, die in 3 Merkmalen übereinstimmen:

Länge **Richtung** **Orientierung**

Die nachfolgenden Betrachtungen werden aus Anschauungsgründen weitestgehend im $\mathbb{R}^2$ durchgeführt. Die Verallgemeinerungen für die 3. Dimension sind leicht selbst zu vollziehen.

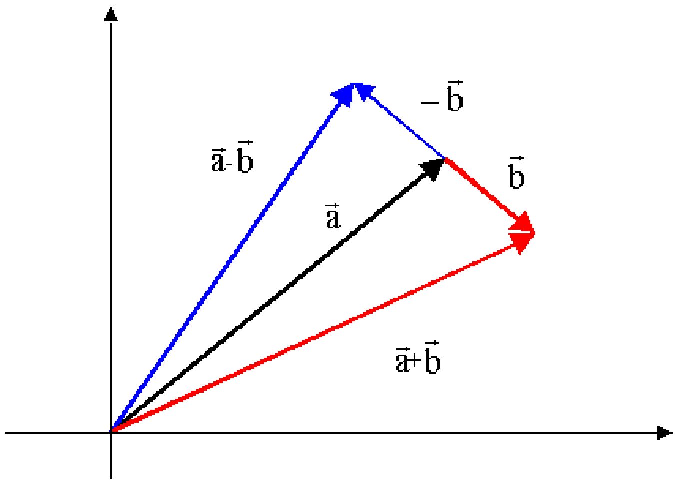
2.2 Die Grundoperationen

Mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

definiert man die bekannte Vektoraddition und -subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$



sowie die Multiplikation mit einer reellen Zahl $\alpha \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}$

und den Betrag eines Vektors $\left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

2.3 Spezielle Vektoren

a) Der **Nullvektor**

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verursacht keine Verschiebung.

b) **Einheitsvektoren** sind Vektoren mit der Länge 3. Für jeden Vektor gibt es einen Einheitsvektor mit derselben Richtung:

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \cdot a = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c) **Natürliche Basis:** Die beiden Einheitsvektoren in Richtung der positiven Halbachsen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden die natürliche Basis im $\mathbb{R}^2$. Jeder Vektor lässt sich durch sie darstellen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Kollineare Vektoren sind Vektoren, denen parallele Pfeile entsprechen. Die Kollinearität umfaßt die Begriffe gleichsinnig parallel und gegensinnig parallel:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \qquad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \qquad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

2.4 Zerlegung eines Vektors in Komponenten vorgegebener Richtung

Häufig steht die Frage, wie stark Halteseile, Träger oder andere Bauelemente durch eine - nicht in ihrer Richtung wirkende - Kraft beansprucht werden. Zeichnerisch kann man das Problem über ein Kräfteparallelogramm angehen. In der Regel wird aber eine rechnerische Lösung erforderlich sein. Das folgende Beispiel soll den einfachsten Fall demonstrieren.

2.5 Das Skalarprodukt von Vektoren

Im Physikunterricht der Schule lernt man, dass die mechanische Arbeit das Produkt aus wirkender Kraft und dem zurückgelegten Weg ist, also

$$W = F \cdot s \,.$$

In dieser Einfachheit gilt diese Formel nur, solange die Kraft in der Richtung des Weges wirkt. Bekanntlich sind aber Kraft und Weg vektorielle Größen, die in der Regel unterschiedliche Richtung haben. In diesem Falle wird nur diejenige Komponente der Kraft wirksam, die in der Richtung des Weges wirkt.

Man sieht leicht, dass das $\left|\vec{F}\right| \cdot \cos \measuredangle(\vec{F}, \vec{s})$ ist, so dass sich die Arbeit allgemein durch $W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos \measuredangle(\vec{F}, \vec{s})$ darstellen lässt.

Da das Ergebnis (die Arbeit) eine skalare (eindimensionale) Größe ist, spricht man von einem Skalarprodukt des Kraft- und Wegvektors.

2.5.1 Definition

Das Skalarprodukt zweier Vektoren definiert man durch

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}$$

Daraus ergeben sich folgende grundlegenden Eigenschaften (Rechenregeln):

a) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

b) $\alpha\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = \vec{a} \circ \left(\alpha\, \vec{b}\right) = \left(\alpha\, \vec{a}\right) \circ \vec{b}$

c) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

d) $\vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \qquad (> 0 \text{ für } \vec{a} \neq \vec{o})$

Weiterhin gilt

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} \perp \vec{b} \qquad (\vec{a} \neq \vec{o} \text{ und } \vec{a} \neq \vec{o})$

Insbesondere ist $\left(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2\right) = 0$, $\left(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1\right) = 1$, $\left(\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2\right) = 1$.

Im 3-dimensionalen Raum gilt analog

$$\left(\vec{e}_i \circ \vec{e}_k\right) = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases}, \qquad i = 1,2,3; \qquad k = 1,2,3.$$

2.5.2 Skalarprodukt in Komponenten

Es gilt

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2} \text{ im } \mathbb{R}^2$$

bzw.

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \text{ im } \mathbb{R}^3$$

Beweis: Wir beschränken uns wegen der Schreibarbeit auf den 2-dimensionalen Fall. Unter Benutzung der Eigenschaften 2.5.1b,c,e können wir umformen

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \circ (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 (\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2) + a_2 b_1 (\vec{e}_2 \circ \vec{e}_1) + a_2 b_2 (\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

q.e.d.

Damit kann man aus der Komponentendarstellung heraus sehr einfach den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen, denn es gilt

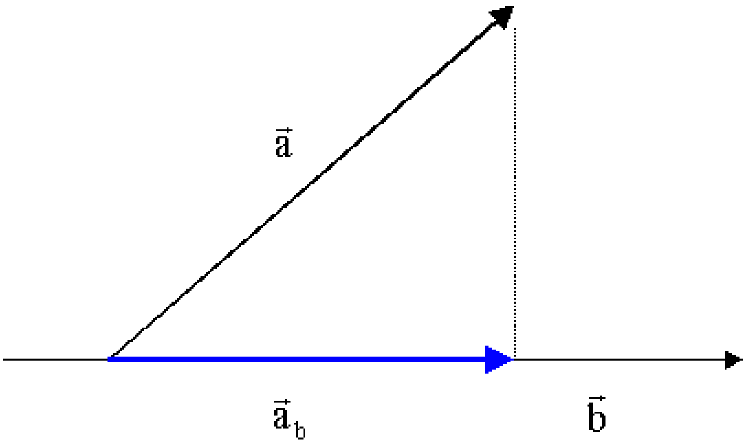
$$\boxed{\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}}$$

2.5.3 Projektionen

Unter der Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ versteht man einen Vektor, der dieselbe Richtung wie $\vec{b}$ hat und dessen Länge und Orientierung man erhält, wenn man vom Endpunkt von $\vec{a}$ das Lot auf die durch $\vec{b}$ gegebene Gerade fällt (gleiche Anfangspunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorausgesetzt).

Offensichtlich gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{a}_b\right|}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow \left|\vec{a}_b\right| = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_b = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$



2.6 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Ergebnis ein Vektor. Diese Produktbildung ist nicht für den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerbar, es handelt sich also um eine spezielle Operation der anschaulichen Vektorrechnung.

2.6.1 Definition

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}}$$

versteht man den Vektor, für den gilt:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ und $\vec{c}\perp\vec{b}$ und
2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden in dieser Folge ein Rechtssystem und
3) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

Bemerkungen:

In der Definition schließt man $\vec{a}=\vec{o}$ oder $\vec{b}=\vec{o}$ aus. Für diese Fälle definiert man sinnvoll $\vec{o}$ als Ergebnis.

Das Ergebnis ist auch dann dreidimensional ist, wenn die beiden Ausgangsvektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ sind.

Das Kommutativgesetz gilt offensichtlich nicht, da $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{b}\times\vec{a}$ gegensinnig parallel sind.

Das Assoziativgesetz gilt nicht. (Man nehme z.B. drei Vektoren aus einer Ebene.)

Es gelten folgende Rechenregeln:

1.) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ (siehe Bemerkung 3)

2.) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3.) $(\alpha\, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\, \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

4.) Für $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ gilt

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ b) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{o}$

c) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3$ d) $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1$

e) $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2$

2.6.2 Komponentendarstellung

Aus

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \text{ und } \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

folgt mit den Regeln aus 2.6.1

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

2.6.3 Anwendungen des Kreuzproduktes

a) Flächeninhalt von Parallelogrammen und Dreiecken

Zwei Vektoren spannen ein Parallelogramm auf. Offensichtlich berechnet sich dessen Flächeninhalt zu

$$\boxed{A = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)},$$

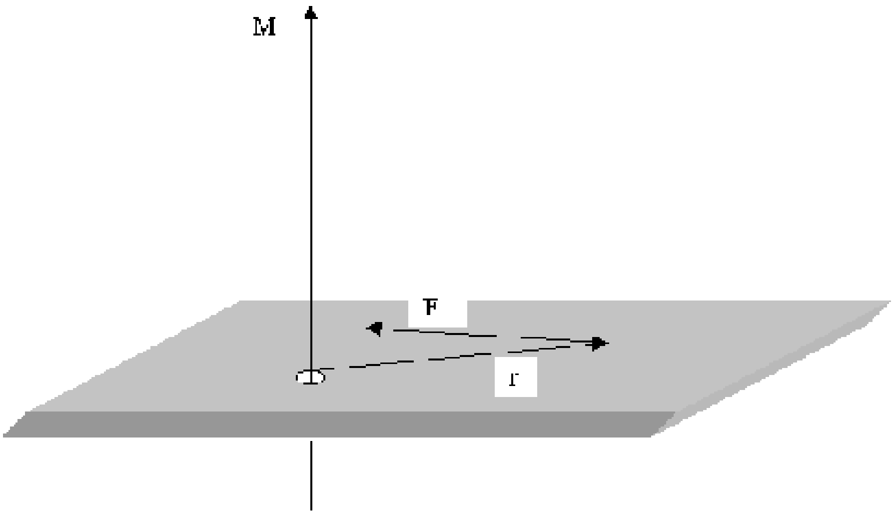
denn $\left|\vec{b}\right| \cdot \sin \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ ist ja gerade die Höhe des Parallelogramms.

Jedes Dreieck ist ein halbes Parallelogramm.

b) Drehmoment

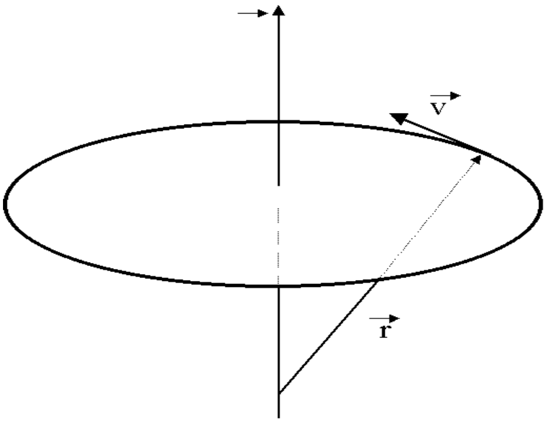
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Nur die zum Ortsvektor senkrechte Komponente der Kraft trägt zum Drehmoment bei (siehe Abb.)



c) Bahngeschwindigkeit (siehe Abb.)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}}$$



d) Bewegtes elektrisches Teilchen im Magnetfeld

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

$\vec{v}$ ... Geschwindigkeitsvektor des Teilchens

$\vec{B}$ ... Feldstärke des Magnetfeldes

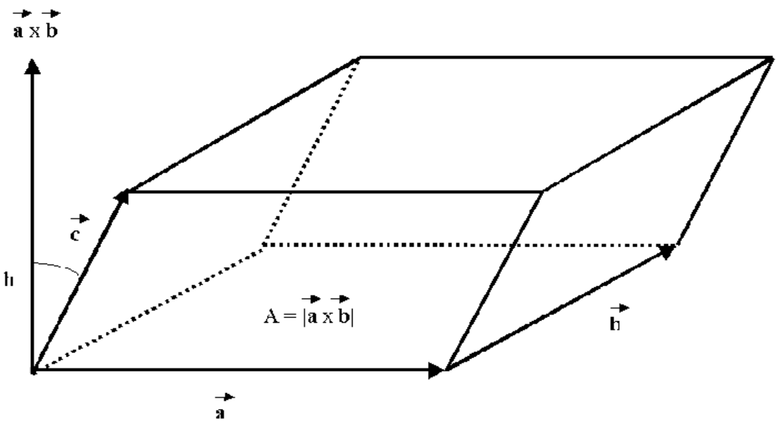
q ... elektr. Ladung des Teilchens

$\vec{F}$ ... Kraft, die auf das Teilchen ausgeübt wird (Lorentz-Kraft)

2.6.4 Das Spatprodukt

dient zur Berechnung des Volumens eines Parallelepipeds (Spats):

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}$$



Aus der Grafik kann man folgendes ablesen.

Grundfläche $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ Höhe $\left|\vec{h}\right| = \left|\vec{c}\right| \cdot \cos \measuredangle\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\right)$

Wichtige Eigenschaften:

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

b) Für $\vec{a} \neq \vec{o},\ \vec{b} \neq \vec{o},\ \vec{c} \neq \vec{o}$ ist $\left[\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{c}\right] = 0$ dann und nur dann, wenn die drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt dann, die Vektoren sind **komplanar**.

Wegen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

erhält man für das Spatprodukt

$$\left[\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{c}\right] = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Diese Formel kann man sich wie folgt merken:

$$\left[\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{c}\right] = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right.$$

Ein auf diese Weise berechneter Term wird als dreireihige **Determinante** bezeichnet. Die Berechnungsvorschrift wird **Regel von Sarrus** (Pierre Frédéric SARRUS, 1798-1861) genannt.

2.8 Anwendungen in der Geometrie

Wichtige Begriffe der Geometrie sind **Punkt**, **Gerade** und **Ebene**. Wir wollen hierzu einige Überlegungen mit Hilfe der Vektorrechnung anstellen.

2.8.1 Punkte und Geraden

Jeder **Punkt** P im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ kann in **Koordinatenschreibweise** oder durch seinen **Ortsvektor** dargestellt werden:

$$P(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad P(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten $P_1(x_1;y_1;z_1)$ und $P_2(x_2;y_2;z_2)$, der von P_1 nach P_2 "zeigt", ergibt sich als Differenzvektor der beiden Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Achtung! Man achte auf die richtige Differenzbildung:

Koordinaten **Endpunkt minus** Koordinaten **Anfangspunkt**

Jede **Gerade** in der Ebene oder im Raum kann man durch die Vektorgleichung

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}, \qquad t \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

beschreiben. In Komponenten erhält man

$$\boxed{\begin{matrix} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + a_2 t \\ z = z_1 + a_3 t \end{matrix} \;, \qquad t \in \mathbb{R}} \qquad (1')$$

Dabei sind

$\vec{r}_1$ ... der **Ortsvektor** eines beliebigen, aber festen Punktes P_1 , der auf der Geraden liegt,

$\vec{a}$ ... ein Vektor, der die Richtung der Geraden angibt (er wird **Richtungsvektor** der Geraden genannt und ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt),

t ... ein reeller Parameter (eine reelle Variable),

$\vec{r}$ ... Ortsvektoren zu beliebigen Punkten der Geraden, also

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

(1) wird sowohl als **Punkt-Richtungs-Gleichung** als auch als **Parameterdarstellung** der Geraden bezeichnet.

Ist eine Gerade durch zwei auf ihr liegenden Punkte gegeben, so nimmt man natürlich den Verbindungsvektor zwischen den Punkten als Richtungsvektor:

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2}, \qquad t \in \mathbb{R}} \qquad (2)$$

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t \quad , \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t \end{aligned}} \qquad (2')$$

Im Falle von (2) bzw. (2') spricht man von der **Zwei-Punkte-Gleichung** einer Geraden.

Eliminiert man den Parameter t, so kommt man im $\mathbb{R}^2$ auf die bekannten Formen der Geradengleichung

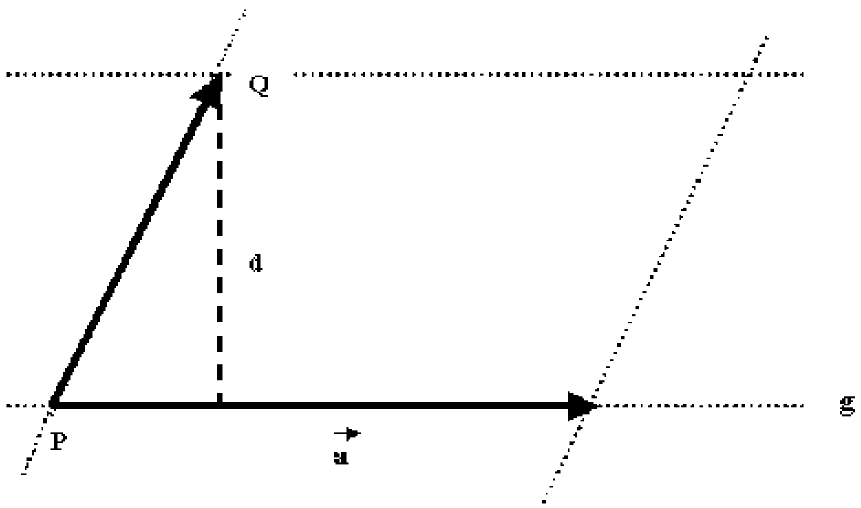
$$c_1x + c_2y = d \qquad \text{bzw.} \qquad y = ax + b \;,$$

während im $\mathbb{R}^3$ zwei lineare Gleichungen übrigbleiben:

$$\begin{aligned} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z &= d_1 \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z &= d_2 \end{aligned}$$

2.8.2 Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden

Der Abstand d zwischen einem Punkt Q und einer Geraden g ist die Höhe eines Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\overrightarrow{PQ}$ aufgespannt wird (siehe Abbildung).



Damit gilt

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times P_1 Q\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Dabei ist P_1 ein beliebiger Punkt und $\vec{a}$ der Richtungsvektor der Geraden g.

2.8.3 Zwei Geraden

$$g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1\,, \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\,\vec{a}_2\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

1) Schnittpunkt:

Der Schnittpunkt S zweier Geraden ergibt sich durch Ermittlung der Werte für t und s aus der Vektorgleichung

$$\vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 = \vec{r}_2 + s\,\vec{a}_2$$

Das sind zwei (in der Ebene) bzw. drei (im Raum) Gleichungen für die beiden Unbekannten t und s. Es sind folgende Fälle möglich.

1. Fall: Es gibt genau eine Lösung, d.h. ein Schnittpunkt liegt vor.

2. Fall: Es gibt unendlich viele Lösungen, d.h. die beiden Geraden sind identisch.

3. Fall: Es gibt keine Lösung, d.h. die Geraden sind entweder parallel oder windschief (sie liegen nicht in einer Ebene; dieser Fall ist nur im Raum möglich).

2) Schnittwinkel:

Ein Schnittwinkel existiert nur, wenn ein Schnittpunkt vorhanden ist. Er ergibt sich aus dem Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren (allerdings nimmt man nur den Winkel zwischen 0° und 90°).

3) Abstand zweier windschiefer Geraden

Einen beliebigen Punkt der 1. Geraden kann man mittels eines Verbindungsvektors mit einem beliebigen Punkt der 2. Geraden verbinden. Da sich die Geraden nicht schneiden, hat es Sinn, nach dem kürzesten unter all diesen Verbindungsvektoren zu fragen. Wir bezeichnen ihn mit $\vec{d}$. Die Länge d dieses kürzesten Verbindungsvektors wollen wir als Abstand der beiden Geraden bezeichnen. Es seien jetzt

$$g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1\,, \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\,\vec{a}_2\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

die beiden windschiefen Geraden. Der Vektor $\vec{d}$ muß offensichtlich auf beiden Geraden senkrecht stehen, also muss gelten:

$$\vec{d} \perp \vec{a}_1 \quad \text{und} \quad \vec{d} \perp \vec{a}_2 \quad \text{, also} \quad \vec{d} = \mu\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \quad .$$

Damit gilt die Gleichung

$$\vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + \mu(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{r}_2 + s\,\vec{a}_2$$

und somit

$$\mu(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + s\,\vec{a}_2 - t\,\vec{a}_1$$

Wir multiplizieren skalar mit

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

und erhalten

$$\mu\left|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\right|^2 = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \circ \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right)$$

bzw.

$$\mu = \frac{\left[\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\right]}{\left|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\right|^2}$$

Damit ergibt sich der gesuchte Abstand *d* zu

$$d = \left|\vec{d}\right| = |\mu| \cdot \left|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right|$$

$$\boxed{d = \frac{\left[\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\right]}{\left|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\right|}}$$

2.8.4 Ebenen

Eine Ebene wird durch einen Punkt und zwei linear unabhängige Vektoren bestimmt.

$$\boxed{E: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}, \qquad s,t \in \mathbb{R}}$$

(Parameterform; Punkt-Richtungen-Gleichung)

Natürlich legen auch drei Punkte eine Ebene fest, sofern sie nicht auf einer Geraden liegen:

$$\boxed{E: \vec{r} = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}, \qquad s,t \in \mathbb{R}}$$

(Drei-Punkte-Gleichung)

Wenn man die Parameter eliminiert, kommt man zu einer linearen Gleichung mit den drei Variablen x, y, z. Im Beispiel ergibt sich $3x + y - 2z = -7$.

Allgemein kann man zu einer parameterfreien Gestalt der Ebenengleichung kommen, wenn man die Gleichung

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}, \qquad s,t \in \mathbb{R}}$$

skalar mit einem Vektor $\vec{n}$ multipliziert, der senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ steht (z.B. mit $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$):

$$\boxed{\vec{r} \circ \vec{n} - \vec{r}_1 \circ \vec{n} = 0}$$

$$\boxed{\vec{r} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - \vec{r}_1 \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0}$$

Man nennt solche Vektoren $\vec{n}$ **Stellungs- oder Normalenvektoren** der Ebene.

Zu einer Normalform - der sogenannten **Hesseschen Normalform** (HNF) - der Ebenengleichung gelangt man, wenn man einen normierten Normalenvektor verwendet:

$$\vec{e}_n = \frac{1}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

In parameterfreier Form kommt man damit zu der HNF

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0}$$

2.8.5 Punkt und Ebene

Der Abstand eines Punktes Q von einer Ebene E wird mit Hilfe eines Normalenvektors ermittelt. Aus

$$\vec{r}_1 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b} + \alpha\,\vec{e}_n = \overrightarrow{OQ}$$

ergibt sich der Abstand $\delta = |\alpha|$ durch skalare Multiplikation mit dem normierten Normalenvektor:

$$\vec{r}_1 \circ \vec{e}_n + 0 + 0 + \alpha = \overrightarrow{OQ} \circ \vec{e}_n \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \overrightarrow{OQ} \circ \vec{e}_n - \vec{r}_1 \circ \vec{e}_n$$

$$\Rightarrow \delta = \left|\overrightarrow{OQ} \circ \vec{e}_n - \vec{r}_1 \circ \vec{e}_n\right|.$$

Ist die Ebene in der HNF gegeben, so erhält man den Abstand δ, wenn man die Koordinaten des Punktes Q in die linke Seite der HNF einsetzt und den Betrag bildet:

$$\boxed{\delta = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}\,.$$

2.8.6 Zwei Ebenen

$E_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + s\,\vec{b}_1 , \quad s,t \in \mathbb{R}$	$E_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + u\,\vec{a}_2 + v\,\vec{b}_2 , \quad u,v \in \mathbb{R}$

Folgende Fälle sind möglich.

1. Fall:

$E_1 = E_2$, d.h. $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$,

d.h. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{o}$ und $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$ sind komplanar ($i = 1, 2$).

2. Fall:

$E_1 \| E_2$ aber $E_1 \neq E_2$

d.h. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{o}$, aber: $\{\vec{r}_2 - \vec{r}_1 , \vec{a}_i , \vec{b}_i\}$ ist lin. unabhängig.

3. Fall:

$E_1 \cap E_2 = g$ (Das ist der häufigste Fall.)

d.h. $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{o}$ ist Richtungsvektor der Schnittgeraden g.

Im dritten Fall versteht man unter dem Schnittwinkel der Ebenen den Winkel (zwischen 0° und 90°) zwischen den beiden Normalenvektoren.

2.8.7 Gerade und Ebene

$E_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + s\,\vec{b}_1 , \quad s,t \in \mathbb{R}$	$g : \vec{r} = \vec{r}_2 + u\,\vec{a}_2 , \quad u \in \mathbb{R}$

Der **Durchstoßpunkt** ergibt sich aus

$$\vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + s\,\vec{b}_1 = \vec{r}_2 + u\,\vec{a}_2 \quad .$$

Skalare Multiplikation mit dem Normalenvektor $\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right)$ der Ebene ergibt

$$\vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) = \vec{r}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + u \cdot \vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)$$

$$\Rightarrow u = \frac{\vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) - \vec{r}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)}{\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)}$$

Somit ergibt sich der Ortsvektor des Durchstoßpunktes zu

$$\boxed{\vec{r}_D = \vec{r}_2 + \frac{\vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) - \vec{r}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)}{\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)} \cdot \vec{a}_2} \quad .$$

Schnittwinkel ist der zu 90° komplementäre Winkel zwischen der Geraden und der Normalen der Ebene.