1. Elementare Algebra

Mit Ausnahme des Abschnitts 1.3 wiederholen wir in diesem Kapitel einige wichtige Regeln und Formeln aus der Schulmathematik, die erfahrungsgemäß bei den meisten Studenten nicht in erforderlichem Maße abrufbar sind.

1.1 Zahlbereiche

1.1.1 Die natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Die Summe und das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist stets wieder eine natürliche Zahl. Für die Differenz und den Quotienten gilt dies nur in Ausnahmefällen.

Eine spezielle Produktbildung ist

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad (n\,\textbf{–Fakultät})}.$$

Man beachte: $\boxed{0! = 1}$ (per definitionem)

Mit Hilfe von Fakultäten werden die sogenannten **Binomialkoeffizienten "*n* über *k*"** gebildet:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \qquad (n \geq k).}$$

Dieser Bruch (in der zweiten Gestalt) hat im Zähler und Nenner jeweils k Faktoren und zwar im Zähler mit n beginnend fallend und im Nenner von 1 bis k aufsteigend. Das Ergebnis ist stets wieder eine natürliche Zahl.

Es gilt stets $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$. (Warum?)

1.1.2 Die ganzen Zahlen

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.

Die Summe, das Produkt und die Differenz zweier ganzer Zahlen ist stets wieder eine ganze Zahl. Für den Quotienten gilt dies nur in Ausnahmefällen.

Wichtig ist:

1. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist dann und nur dann gleich 0, wenn einer der beiden Faktoren (oder auch beide) gleich 0 ist (sind).

2. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist dann und nur dann positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen haben.

3. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist dann und nur dann negativ, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben.

1.1.3 Die rationalen Zahlen

Q $= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.

Die Summe, das Produkt und die Differenz zweier rationaler Zahlen ist stets wieder eine rationale Zahl. Für den Quotienten gilt dies nur mit der Einschränkung, dass der Divisor (Nenner) verschieden von Null sein muss.

Merke: Die Division durch Null ist nicht definiert!

Denkt man sich die rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl als Punkte abgetragen, so gibt es - wie Dedekind gezeigt hat - zwischen zwei rationalen Zahlen immer noch Punkte, die keiner rationalen Zahl entsprechen. So kann man z.B. zeigen, dass die Quadratwurzel aus 2 nicht rational ist.

Beweis (indirekt):

Wenn $\sqrt{2}$ *rational wäre, dann würden teilerfremde ganze Zahlen p und q* ($q \neq 0$) *existieren, so dass* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *gilt.*

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

p^2 *ist also eine gerade Zahl und damit muss auch p eine gerade Zahl sein:* $p = 2r$.

$$\Rightarrow (2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2.$$

Damit wäre auch q^2 *und somit q eine gerade Zahl. Also wären p und q nicht teilerfremd, weil sie ja beide durch 2 teilbar sind. Dieser Widerspruch kann nur aufgelöst werden, wenn man die Voraussetzung (*$\sqrt{2}$ *ist rational) fallen lässt.*

Merke: Die Punkte auf dem Zahlenstrahl entsprechen nicht nur rationalen Zahlen sondern auch sogenannten irrationalen Zahlen (wie z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi \approx 3{,}14$, $e \approx 2{,}718$ **usw.)**

1.1.4 Die reellen Zahlen

Zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gelangt man, wenn man zu den rationalen auch noch die irrationalen Zahlen hinzu nimmt. Dadurch wird der Zahlenstrahl vollständig ausgefüllt.

Bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gelten die selben Eigenschaften wie bei rationalen Zahlen. Neu ist, dass nun auch **aus allen nichtnegativen Zahlen die Quadratwurzel** gezogen werden kann.

Will man aus allen reellen Zahlen eine Quadratwurzel definieren, so muss man die imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$ definieren und gelangt somit zu den komplexen Zahlen (siehe Abschnitt 1.3).

Beim Umgang mit reellen Zahlen benötigt man häufig den Betrag und das Signum einer reellen Zahl.

Betrag: $|x| = \begin{cases} x, \text{ wenn } x \geq 0 \\ -x, \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$

Signum (Vorzeichen): $sgn(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x > 0 \\ 0, \text{ wenn } x = 0 \\ -1, \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$

Diese simpel erscheinenden Definitionen bereiten immer wieder große Schwierigkeiten, wenn man sie anwenden muss. Die Ursache ist wohl in den notwendigen Fallunterscheidungen zu suchen.

1.2 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

1.2.1 Umformen von Termen

Da definitionsgemäß "Punktrechnung" vor "Strichrechnung" geht, also Multiplikation und Division Vorrang vor Addition und Subtraktion haben - solange keine Klammern etwas anderes vorschreiben - ist das Setzen und Beachten von Klammern beim Umformen von allerhöchster Bedeutung! Hier werden von der heutigen Studentengeneration sehr viele gravierende Fehler gemacht.

Merke: Das Weglassen oder Nichtbeachten von Klammern ist kein Kavaliersdelikt sondern wird bestraft. In solchen Fällen wird beim Korrigieren von Klausuren auch nicht mehr die sonst übliche Folgefehlertoleranz geübt!!

Häufig vorkommende Umformungen basieren auf den **Binomischen Formeln**.

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Man leite diese Formeln her!

Verallgemeinert man die 1. Binomische Formel für Exponenten 3,4,..., so erhält man den **Binomischen Lehrsatz**:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0}$$

Beim Umgang mit Brüchen ist die Art und Häufigkeit der Fehler schier unerschöpflich. Es ist unmöglich, hier noch einmal die gesamte Bruchrechnung zu wiederholen.

Merke: Jeder Bruch steht für eine Division. Bestehen Zähler und/oder Nenner aus Summen/Differenzen, so ersetzt der Bruchstrich die Klammern. Besitzen Zähler **und** Nenner einen **gemeinsamen Faktor**, so kann man diesen weglassen (kürzen)

1.2.2 Algebraische Gleichungen

Am einfachsten sind **lineare Gleichungen** zu lösen:

$$\boxed{ax = b}$$

hat für $a \neq 0$ die einzige Lösung $x = \frac{b}{a}$ und für $a = 0$ sind alle reellen x eine Lösung.

Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0)$$

überführt man mittels Division durch a zunächst in die **Normalform**

$$\boxed{x^2 + px + q = 0},$$

bildet dann im Hinblick auf die binomischen Formeln die **quadratische Ergänzung**

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

und gelangt so zu der bekannten **Lösungsformel** für quadratische Gleichungen:

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}.$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ gibt es zwei verschiedene reelle Wurzeln (Lösungen) der Gleichung.

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ gibt es eine reelle Doppelwurzel (Doppellösung) der Gleichung.

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ gibt es keine reelle Wurzel (Lösung) der Gleichung sondern ein komplexes Wurzelpaar (siehe Abschnitt1.3).

Kubische Gleichungen und allgemein **algebraische Gleichungen höheren Grades**

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \qquad n \geq 3}$$

lassen sich nur in Ausnahmefällen geschlossen lösen (insbesondere mit vertretbarem praktischen Aufwand). Hier bevorzugt man **numerische Verfahren** (bzw. man ist gezwungen, numerische Verfahren heranzuziehen).

1.2.3 Ungleichungen

Zum Lösen von Ungleichungen bedient man sich derselben Umformungsschritte wie bei

Gleichungen. Man muss jedoch zwingend folgendes beachten:

Wird eine Ungleichung mit einem negativen Faktor multipliziert bzw. durch eine negative Zahl dividiert, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!

Die Tücke besteht darin, dass dieser Faktor auch die Unbekannte x enthalten kann. In diesem Falle muss **zwingend eine Fallunterscheidung** durchgeführt werden!

Zur Lösung einer **quadratischen Ungleichung** stellt man zunächst

die Normalform 1a $x^2 + px + q < 0$ bzw. 1b $x^2 + px + q \leq 0$

oder

die Normalform 2a $x^2 + px + q > 0$ bzw. 2b $x^2 + px + q \geq 0$

her. Anschließend bestimmt man wie bei einer quadratischen Gleichung

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und erhält dann folgende Lösungsmengen:

	$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	$x_{1/2} \in \mathbb{C}$
Normalform 1a	$x_1 < x < x_2$	$L = \varnothing$	$L = \varnothing$
Normalform 1b	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x = x_{1/2}$	$L = \varnothing$
Normalform 2a	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \neq x_{1/2}$	$L = \mathbb{R}$
Normalform 2b	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$L = \mathbb{R}$	$L = \mathbb{R}$

1.3 Komplexe Zahlen

Die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 13 = 0$ hat keine reelle Lösung, denn die Lösungsformel führt zu

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{-1},$$

wobei $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl sondern lediglich ein formales Symbol ist.

Die Entwicklung der Mathematik - aber auch der Physik und der Ingenieurwissenschaften hat jedoch gezeigt, dass es Sinn macht, eine formale Rechnung mit Ausdrücken der Gestalt $a + b \cdot \sqrt{-1}$ zu definieren. Dies führt zum Kalkül der komplexen Zahlen, mit deren Hilfe man beispielsweise das Ohm´sche Gesetz im Gleichstromkreis $R = \frac{U}{I}$ in analoger Weise auf den Wechselstrom übertragen kann: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. Dabei sind die unterstrichenen Größen die zu Widerstand, Spannung und Stromstärke analogen komplexen Größen, die man noch näher erklären muss.

1.3.1 Begriffe und Grundoperationen

Der formale Ausdruck $a + b \cdot \sqrt{-1}$, in dem a und b reelle Zahlen sind, wird als komplexe Zahl bezeichnet. Für $\sqrt{-1}$ wird die Abkürzung i (in der Mathematik und Physik) bzw. j (in den Ingenieurwissenschaften) eingeführt. Damit haben die komplexen Zahlen die Struktur

$$\boxed{z = a + b \cdot i \quad \text{bzw. } z = a + b \cdot j.}$$

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man $\mathbb{C} = \{z|\ z = a + b \cdot j,\ a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$.

a nennt man den **Realteil** von z: $a = \mathrm{Re}(z)$

b nennt man den **Imaginärteil** von z: $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

j nennt man die **imaginäre Einheit**.

Alle Zahlen bj heißen **imaginäre Zahlen**.

Achtung! Die imaginäre Einheit j gehört nicht zum Imaginärteil.

Die **Addition, Subtraktion** und **Multiplikation von komplexen Zahlen** wird wie bei reellen Zahlen erklärt, wobei im Falle der Multiplikation die Gleichung $j \cdot j = -1$ zu beachten ist:

$$\boxed{(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j}$$

$$\boxed{(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j}$$

$$\boxed{(a + bj) \cdot (c + dj) = ac + adj + bcj + bdj^2 = (ac - bd) + (ad + bc)j}$$

Man muss also keine neuen Rechenregeln lernen!

Zu jeder komplexen Zahl $z = a + bj$ gibt es eine **konjugiert-komplexe** Zahl $\overline{z} = a - bj$ mit der Eigenschaft $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bj$ wird wie folgt definiert:

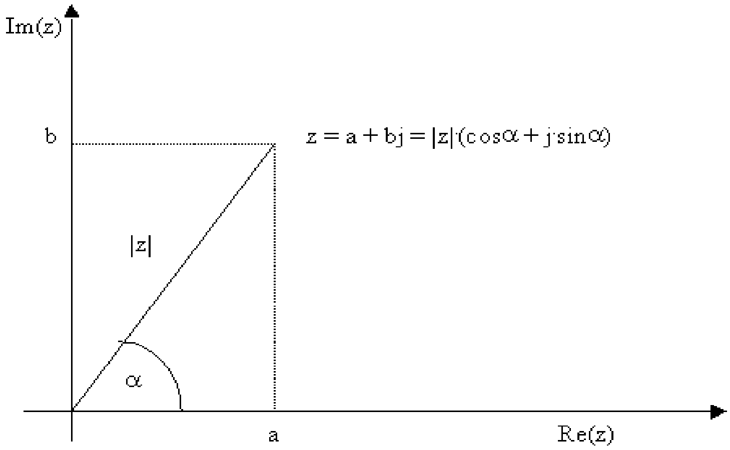
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Die **Division** zweier komplexer Zahlen lässt sich auf die Multiplikation zurückführen, indem man den Bruch mit der konjugiert-komplexen Zahl des Divisors erweitert:

$$\boxed{\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj) \cdot (c - dj)}{(c + dj) \cdot (c - dj)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2}}.$$

Geometrisch kann man die komplexen Zahlen in der Ebene veranschaulichen, indem man eine reelle (die waagerechte) und eine imaginäre (die senkrechte) Achse einführt. Dabei wird auch deutlich, dass man jede komplexe Zahl nicht nur durch ihren Real- und Imaginärteil sondern auch durch ihren Betrag und einen Winkel eindeutig angeben kann.

Man nennt diese Ebene dann die **Gauß’sche Zahlenebene**.



1.3.2 Trigonometrische und Exponentialdarstellung

Damit kann man also jede komplexe Zahl

- in der **arithmetischen Form** $z = a + bj$ oder

- in der **trigonometrischen Form** $z = |z| \cdot (\cos\alpha + j\sin\alpha)$

angeben.

α nennt man das **Argument** der komplexen Zahl z. Es bestehen offensichtlich folgende Beziehungen:

$$\mathrm{Re}(z) = a = |z| \cdot \cos\alpha, \qquad \mathrm{Im}(z) = b = |z| \cdot \sin\alpha$$
$$\tan\alpha = b/a$$

Hieraus kann man α ermitteln, wenn man die Vorzeichen von a und b berücksichtigt (denn daraus ergibt sich der Quadrant).

Berechnet man das Produkt zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1 j = |z_1| \cdot (\cos\alpha_1 + j \cdot \sin\alpha_1)$$
$$z_2 = a_2 + b_2 j = |z_2| \cdot (\cos\alpha_2 + j \cdot \sin\alpha_2)$$

in trigonometrischer Form, so erhält man:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + j(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2)],$$

also

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [cos(\alpha_1 + \alpha_2) + j \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2)]}$$

Analog kann man zeigen:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + j \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

Aus der Multiplikationsformel ergibt sich insbesondere

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos 2\alpha + j \cdot \sin 2\alpha)$$

bzw. durch induktive Verallgemeinerung

$$\boxed{z^k = |z|^k \cdot [\cos(k\alpha) + j \cdot \sin(k\alpha)]}\ .$$

Die Beziehung

$$\boxed{(\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha)^k = [\cos(k\alpha) + j \cdot \sin(k\alpha)]}$$

wird als **Satz von Moivre** bezeichnet. (Abraham de MOIVRE 1667-1754).

Führt man für $(\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha)$ die Abkürzung $e^{j\alpha}$ ein, so kann man jede komplexe Zahl auch noch in der sogenannten **Exponentialform**:

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{j\alpha}}$$

darstellen.
Diese Darstellung verträgt sich wegen des Satzes von Moivre mit allen Rechengesetzen (insbesondere den Potenzgesetzen) und - wie wir später mit Kenntnissen über unendliche Reihen zeigen können - auch mit den Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion. Die Gleichung

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \cdot \sin\alpha}$$

heißt **Eulersche Beziehung**. (Leonhard EULER 1707-1783).

1.3.3 Radizieren

Wir kommen jetzt zur Umkehroperation, dem **Radizieren**. Es sind also alle komplexen Zahlen w gesucht, deren n-te Potenz eine vorgegebene Zahl z ergeben. Man kann sich sofort davon überzeugen, dass alle Zahlen

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right],\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

diese Bedingung erfüllen, denn ihre n-te Potenz ergibt wegen der 2π-Periodizität der sin- und cos-Funktion gerade $z = |z| \cdot [\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha]$. Man könnte auch $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ durchlaufen lassen; jedoch wiederholen sich dann nur die n verschiedenen, oben angegebenen Wurzeln (wegen der 2π-Periodizität der cos- und sin-Funktion).

(1.3.4 Schwingungen als Zeigerdiagramm)

In der Wechselstromtechnik (aber auch in anderen Gebieten) stellen Schwingungen eine wesentliche Grundlage dar. Diese kann man beispielsweise als Sinusschwingung

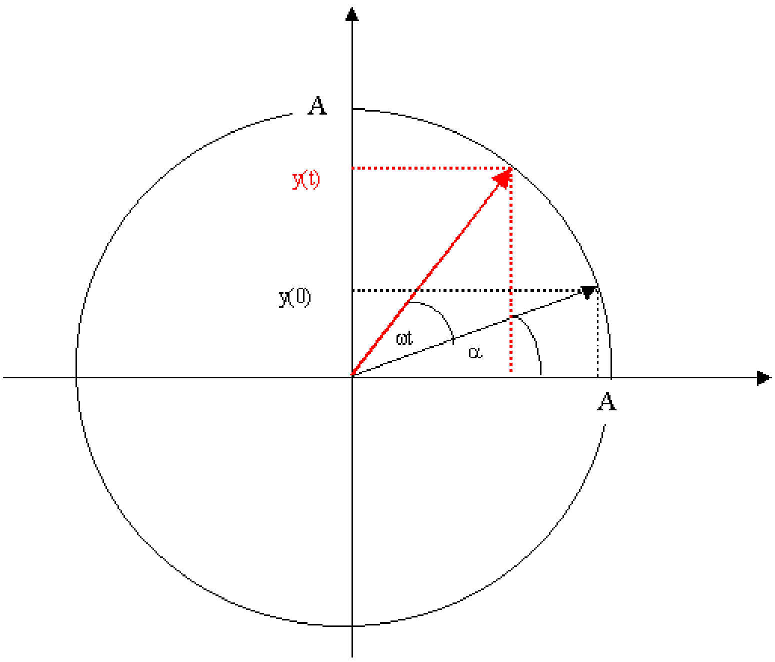
$y(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$

beschreiben, wobei

*A die Schwingungs**amplitude**,*

φ *die **Phase** (Anfangsphase, Phasenwinkel) und* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ *die **Kreisfrequenz** ist.*

Es ist $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ *die **Schwingungsdauer**. Also ist* $T \cdot \omega = 2\pi$ *und* $t \cdot \omega$ *stellt damit den aktuellen Winkel zum Zeitpunkt t dar.*



Der y –Wert des Zeigers ist $y(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$ *und der x-Wert ist* $x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$*. Damit erhalten wir die **komplexe Darstellung des Zeigers** in der Form*

$\underline{z}(t) = A \cdot [cos(\omega t + \varphi) + j \cdot sin(\omega t + \varphi)] = A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$.

$\underline{A} = A \cdot e^{j\varphi}$ *wird als **komplexe Amplitude** bezeichnet. Sie legt die Anfangslage fest. Es ist* $|\underline{A}| = A$.

Die Zeitfunktion $e^{j\omega t}$ *hat den Betrag 1 und beschreibt die Rotation des Zeigers mit der Winkelgeschwindigkeit* ω.

*Der momentane y –Wert der Schwingung (**Momentanwert**) ist der Imaginärteil*

$y = Im(z) = A \cdot sin(\omega t + \varphi)]$.

Beispiel: *Anwendung bei Schwingungsüberlagerung:*

Wir beschreiben die Superposition von 2 Sinusschwingungen mit der gleichen Kreisfrequenz:

$y_1 = A_1 \cdot sin(\omega t + \varphi_1)]$ und $y_2 = A_2 \cdot sin(\omega t + \varphi_2)]$

$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$ *mit noch zu bestimmenden A und* φ.

Komplexe Darstellung: $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t}$

(In der E-Technik werden komplexe Größen oft durch Unterstreichen gekennzeichnet!)

Merke: Die komplexen Amplituden addieren sich bei der Überlagerung: $\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$.

Jetzt kann man die Schwingung im Reellen angeben: $y = Im(\underline{z}) = Im((\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t})$

Zahlenbeispiel:

$y_1 = 100V \cdot sin(\omega t)$ (d.h. $\varphi_1 = 0$) und $y_1 = 150V \cdot sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ (d.h. $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$).

$\underline{A}_1 = 100V \cdot e^{0 \cdot j} = 100V \cdot (\cos 0 + j \sin 0)$, $\underline{A}_2 = 150V \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot j} = 150V \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})$

$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = (100V + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 150V) + j \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 150V = 206V + j \cdot 106V$

$\Rightarrow |\underline{A}_1 + \underline{A}_2| = \sqrt{206^2 + 106^2} = 231.3.7 \quad \wedge \quad \varphi = arctan(\frac{106}{206}) = 0.48$

Überlagerung:

$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = (206V + j \cdot 106V) \cdot e^{j\omega t} = 231,7V \cdot e^{(0,48 + \omega t) \cdot j}$

$\Rightarrow \underline{y = Im(\underline{z}) = 231,7V \cdot sin(0,48 + \omega t)}$