Im Folgenden finden Sie die Aufgabenstellungen der bisherigen Klausuren Algebra im Bachelorstudium der ET-Studiengänge sowie knapp gehaltene Ergebnisangaben. Die Lösungswege sind absichtlich nicht angegeben, Fragen können aber in den Übungen gestellt werden.

Alle Klausuren dauerten 60 Minuten. Taschenrechner waren nicht zugelassen.

Algebra-Klausur vom 20.01.2007, Erreichbare Punktzahl: 12+3+7+2+6=30

Aufgabe 1: Gegeben ist $A(3;-1;2)$, sowie $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Gesucht sind die Koordinaten der Punkte B und D sowie die von demjenigen Punkt C, der zusammen mit A, B, D ein Parallelogramm bildet.

b) Wie lang ist die Diagonale $\overline{AC}$?

c) Man berechne die Höhe $h_{\overline{AB}}$ und die Fläche F des Parallelogramms!

Aufgabe 2: Welche Information besitzt man über die Zeilenzahl und die Spaltenzahl der Matrizen A und B, wenn $A \cdot B$ vom Typ $(3,4)$ ist?

Aufgabe 3: Für welche Werte von α, β, γ ist $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ -1 & \beta & 3 \\ 5 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$ die inverse Matrix von $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -17 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 4: Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat u.a. die beiden Lösungen

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine weitere Lösung an!

Aufgabe 5: a) Ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?.

b) Berechnen Sie mindestens einen Eigenvektor der Matrix A!

Lösung 1: a) $B(5;2;3)$, $D(4;3;4)$, $C(6;6;5)$

b) $\overline{AC} = \sqrt{9+49+9} = \sqrt{67}$ c) $F = \sqrt{38}$, $h_{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{19}{7}}$

Lösung 2: A hat 3 Zeilen und so viele Spalten wie B Zeilen besitzt. B hat 4 Spalten.

Lösung 3: $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 2$

Lösung 4: z.B.: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T$

Lösung 5: a) Ja, denn für $\lambda = -1$ ist $\det(A - \lambda E) = 0$, b)$x = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \end{pmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$

Algebra-Klausur vom 07.05.2007, Erreichbare Punktzahl: 5+3+12+7+3=30

Aufgabe 1: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Gibt es reelle Werte für c, so dass $\det(A \cdot A^T) = 0$.

b) Lösen Sie für $c = 1$ das Gleichungssystem $A \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: Ist $\lambda = 5$ ein Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 3: Gegeben sind vier Punkte $A(2;1;2)$, $B(3;0;1)$, $C(a;-1;4)$, $D(-2;1;1)$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Geben Sie die Verbindungsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ als Spaltenvektoren an!

b) Berechnen Sie alle reellen Werte für a, für die die Punkte A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck bilden?

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks A, B, D!

Aufgabe 4:

a) Für welche reellen Werte von a liegen die vier Punkte A, B, C, D aus Aufgabe 3 in einer Ebene?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g an, die durch A und B geht!

c) Welchen Abstand hat der Punkt D von der Geraden g?

Aufgabe 5: Berechnen Sie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung 1: a) $\det(A^T \cdot A) = c^2 + 6c + 17 \neq 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$

b) $x = \begin{pmatrix} -3-4t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

Lösung 2: Nein, $\lambda = 5$ ist kein EW, denn $\det(A - \lambda E) = 60 \neq 0$.

Lösung 3:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} a-3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a-2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $a = 5 \vee a = 2$

c) $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+25+16} = \frac{1}{2}\sqrt{42}$

Lösung 4: a) $a = 20$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$ c) $\rho = \sqrt{14}$

Lösung 5: $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Algebra-Klausur vom 29.01.2008, Erreichbare Punktzahl: 6+2+2+3+6+3=22

Aufgabe 1: Geben Sie je ein Beispiel an für

a) zwei orthogonale Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

b) eine Matrix vom Typ $(3,2)$,

c) eine komplexe Zahl mit dem Imaginärteil 6 und dem Betrag 10,

d) eine symmetrische Matrix der Ordnung 4,

e) eine untere Dreiecksmatrix der Ordnung 3,

f) ein homogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten!

Aufgabe 2: Man schreibe die komplexe Zahl $z = 2e^{\frac{\pi}{6}j}$ in der trigonometrischen und in der arithmetischen Form!

Aufgabe 3: Auf der rechten Seite der "Gleichung" hat sich ein Schreibfehler eingeschlichen. Man beseitige diesen, so dass die Gleichung für alle x richtig ist! (Begründung!)

$$\frac{2x^3 + 8x^2 + x - 15}{x+3} = 2x^2 - 2x - 5$$

Aufgabe 4: Ein inhomogenes LGS $Ax = b$ mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten hat die beiden

Lösungen $x^T = (1\ \ -2\ \ -3)$ und $y^T = (-1\ \ 4\ \ -2)$.

a) Geben Sie eine dritte Lösung an!

b) Wieviele Lösungen hat das System insgesamt?

c) Welchen Wert hat die Koeffizientendeterminante?

Aufgabe 5: Gegeben sind die beiden Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

a) den Winkel α zwischen den beiden Vektoren,

b) einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht auf beiden steht,

c) den Abstand d des Punktes $Q(1;-1;4)$ von der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird und den Koordinatenursprung enthält!

Aufgabe 6: Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an!

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 3x_1 & - & 6x_2 & & + & 12x_4 & = & 8 \\ & + & 4x_2 & -2x_3 & - & 8x_4 & = & -5 \\ & - & 2x_2 & & + & 7x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung 1: (1+1+1+1+1+1=6 Pkt.)

Lösung 2: $z = 2(\cos 30° + j\sin 30°) = \sqrt{3} + j$

Lösung 3: Polynomdivision liefert $2x^2\boxed{+}2x - 5$.

Lösung 4: a) z.B.: $z^T = (3\ \ -8\ \ -4)$ b) unendlich viele c) $\det(A) = 0$

Lösung 5: a) $\alpha = 90°$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $E : d = \frac{4}{3}$

Lösung 6: $x = \begin{pmatrix} 3t + \frac{5}{3} & \frac{7}{2}t - \frac{1}{2} & 3t + \frac{3}{2} & t \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R}$.

===

Algebra-Klausur vom 07.05.2008, Erreichbare Punktzahl: 6+3+4+3+4+4=24

===

Aufgabe 1: Man gebe je ein Beispiel an für

a) die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$, die den Punkt $P_0(1;-1;2)$ enthält,

b) einen Vektor $\vec{a}$,der senkrecht auf der Ebene $E\ :\ x + 2y - 3z = 4$ steht,

c) eine komplexe Zahl mit dem Argument $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ und dem Betrag 2,

d) zwei parallele, aber nicht identische Geraden im $\mathbb{R}^3$,

e) eine Diagonalmatrix der Ordnung 3 mit der Determinante 6,

f) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten!

Aufgabe 2: a) Welche komplexe Zahl z_2 entsteht, wenn man den Zeiger von $z_1 = 1 + j$ um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn dreht?

b) Berechne alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 - 2j = 0$!

Aufgabe 3: Berechne alle reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$!

Aufgabe 4: Berchne die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 5: Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne den Flächeninhalt des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms!

b) Wie könnten z.B. die Koordinaten der 4 Eckpunkte A, B, C, D eines solchen Parallelogramms aussehen?

Aufgabe 6: Gegeben sind zwei Matrizen A und B, die beide vom Typ $(2,3)$ sind. Welche der Operationen B^T, $A+B$, AB, A^TB sind erklärt, welchen Typ hat in diesem Falle die Ergebnismatrix und lässt sich von dieser eine Determinante berechnen?.

Lösung 1: (1+1+1+1+1+1=6 Pkt.)

Lösung 2: a) $z_2 = -1 + j$ b) $z_{1/2} = \pm(1 + j)$

Lösung 3: $x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 7$

Lösung 4: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung 6:

Operation	B^T	$A+B$	AB	A^TB
Typ	$(3,2)$	$(2,3)$	–	$(3,3)$
Determinante	nein	nein	-	ja

Lösung 5: a) $A = 9$ b) $A(0;0;0)$, $B(1;-2;-2)$, $C(2;-1;2)$, $D(3;-3;0)$