

F A C H
H O C H
S C H U L E
J E N A

Prof. Dr. Johannes Grützmann

Fachbereich
Grundlagenwissenschaften

Formelsammlung Mathematik

für
Ingenieure

Diese Formelsammlung ist von mir in den Jahren 1991 bis 1993 als studienbegleitendes Material für den hausinternen Gebrauch entwickelt und damals in CHIWRITER geschrieben worden. Die vorliegende dreiteilige WORD-Fassung hat Herr stud. ing. Andre Roddewig dankenswerter Weise in mühsamer Kleinarbeit erstellt. Für die Durchsicht auf Schreib- und andere Fehler danke ich den Herren stud. ing. David Roßkamp und stud. ing. Marc Stampe. Trotzdem können sich noch immer Fehler eingeschlichen haben. Deshalb bin ich dankbar für alle Hinweise in dieser Richtung.

Auch diese Fassung darf nur als studienbegleitendes Material zu meinen Vorlesungen an der FH Jena verwendet werden.

SYMBOLE AUS DER MENGENLEHRE

| | | |
|---|---|---|
| Leere Menge $\{ \}$ bzw. \emptyset | : | Enthält kein Element. |
| Potenzmenge von A | : | $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ |
| Komplementbildung bzgl. einer Grundmenge M | : | $\bar{A} = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin A\}$ |
| Vereinigung von Mengen | : | $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ |
| Durchschnitt von Mengen | : | $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ |
| Differenz von Mengen | : | $A / B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ |
| Disjunkte (durchschnittsfremde) Mengen | : | $A \cap B = \emptyset$ |
| De MORGANsche Regeln | : | $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ |

SYMBOLE AUS DER LOGIK

Komplement \bar{p} :

| | |
|-----|-----------|
| p | \bar{p} |
| w | f |
| f | w |

| p | q | Implikation (aus p folgt q) $p \Rightarrow q$ | Disjunktion (p oder q) $p \vee q$ | Äquivalenz (p genau dann wenn q) $p \Leftrightarrow q$ | Konjunktion (p und q) $p \wedge q$ |
|-----|-----|---|---|--|--|
| f | f | w | f | w | f |
| f | w | w | w | f | f |
| w | f | f | w | f | f |
| w | w | w | w | w | w |

KOMPLEXE ZAHLEN

$$z = a + jb = |z| \cdot (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha) = |z| \cdot e^{j\alpha}$$

a nennt man den **Realteil** von z : $a = \operatorname{Re}(z)$

b nennt man den **Imaginärteil** von z : $b = \operatorname{Im}(z)$

j nennt man die **imaginäre Einheit**.
Alle Zahlen bj heißen **imaginäre Zahlen**.

α nennt man das **Argument** von z : $\alpha = \arg(z)$

$z = a + jb$ und $z = a - jb$ heißen zueinander **konjugiert komplex**.

Betrag der komplexen Zahl $z = a + jb$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Operationen

$$z_1 = a_1 + j \cdot b_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha_1 + j \cdot \sin \alpha_1) = |z_1| \cdot e^{j\alpha_1}$$

$$z_2 = a_2 + j \cdot b_2 = |z_2| \cdot (\cos \alpha_2 + j \cdot \sin \alpha_2) = |z_2| \cdot e^{j\alpha_2}$$

Addition und Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + j \cdot (b_1 \pm b_2)$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + j \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Division:

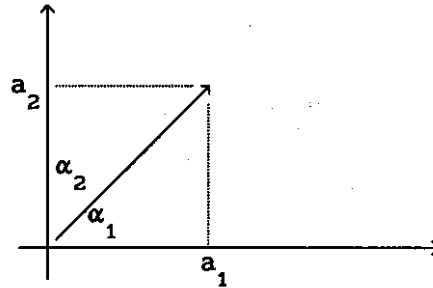
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2} + j \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + j \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Potenzieren: $z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\alpha) + j \cdot \sin(n\alpha)] = |z|^n e^{jn\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$

Radizieren: $w^n = z \Rightarrow w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$, $k=0,1,\dots,n-1$

ANSCHAULICHE VEKTORRECHNUNG I

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



a_1 , a_2 sind die **Richtungswinkel** von \vec{a} .

$\cos a_1 = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$ und $\cos a_2 = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$ sind die **Richtungskosinus** von \vec{a} .

Nullvektor : $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor in Richtung von \vec{a} : $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Natürliche Basis im R^3 : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kollineare Vektoren (parallele Pfeile) : $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$

ANSCHAULICHE VEKTORRECHNUNG II

Skalarprodukt von Vektoren:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a, b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Eigenschaften (Rechenregeln):

| | |
|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | b) $(\vec{a}\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a}\vec{b})$ |
| c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ | d) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ |
| e) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} (\vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0})$ | |

Insbesondere ist $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$, $i=1,2,3$; $k=1,2,3$

Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} : $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Projektion des Vektors \vec{a} auf den Vektor \vec{b}

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \quad \left| \vec{a}_b \right| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} ,$$

für den gilt:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ und
- 2) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} bilden in dieser Folge ein Rechtssystem und
- 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{a, b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

ANSCHAULICHE VEKTORRECHNUNG III

Rechenregeln für das Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

| | |
|---|---|
| a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ | b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ |
| c) $(\vec{a}\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} \times \vec{b})$ | d) Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ |
| e) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3$ $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1$ $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2$ | |

Anwendungen des Vektorproduktes (Kreuzproduktes):

a) Flächeninhalt von Parallelogrammen: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Jedes Dreieck ist ein halbes Parallelogramm.

b) Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

c) Bahngeschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

d) Bewegtes elektrisches Teilchen im Magnetfeld: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

\vec{v} ... Geschwindigkeitsvektor des Teilchens

\vec{B} ... magnetische Flussdichte des Magnetfeldes

q ... elektrische Ladung des Teilchens

\vec{F} ... Kraft, die auf das Teilchen ausgeübt wird (Lorentz-Kraft)

Spatprodukt (sein Betrag ist das Volumen eines Parallelepipeds)

| |
|---|
| $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ |
|---|

Wichtige Eigenschaften:

a) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$

b) Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ ist $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$ dann und nur dann, wenn die drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt dann, die Vektoren sind **komplanar**.

ANSCHAULICHE VEKTORRECHNUNG IV

Geraden

Punkt-Richtungs-Gleichung (Parameterdarstellung):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a_1 t \\ y &= y_1 + a_2 t \\ z &= z_1 + a_3 t \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Zwei-Punkte-Gleichung:

$$\vec{r} = 0\vec{P}_1 + t\vec{P}_1\vec{P}_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{P_1Q}|}{|\vec{a}|}$$

Dabei ist P_1 ein beliebiger Punkt und \vec{a} der Richtungsvektor der Geraden g .

Abstand zweier windschiefer Geraden:

$$d = \frac{|[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2]|}{|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}$$

ANSCHAULICHE VEKTORRECHNUNG V

Ebenen

Parameterform (Punkt-Richtungen-Gleichung):

$$E: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a} + s\vec{b}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Drei-Punkte-Gleichung:

$$E: \quad \vec{r} = 0\vec{P}_1 + t\vec{P}_1\vec{P}_2 + s\vec{P}_1\vec{P}_3, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Parameterfreie Darstellung:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

mit

$$A = a_2b_3 - a_3b_2, \quad B = a_3b_1 - a_1b_3, \quad C = a_1b_2 - a_2b_1, \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

Darstellung mit Normalenvektor \vec{n} der Ebene:

$$(\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r}_1, \vec{n}) = 0$$

Hessesche Normalform:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Abstand eines Punktes $Q(q_1, q_2, q_3)$ von einer Ebene:

$$d = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

GANZRATIONALE FUNKTIONEN (POLYNOMFUNKTIONEN)

Normalform: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$

Produktform: $P_n(x) = a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$

Abspalten einer Nullstelle (Horner-Schema):

| | | | | | | |
|-------|-------|-----------------|---------|-----------------|-----------------|--|
| x_k | a_n | a_{n-1} | \dots | a_1 | a_0 | $b_0 \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ falls } x_k \text{ eine Nullstelle} \\ = \text{Rest, falls } x_k \text{ keine Nullstelle} \end{array} \right.$ |
| | - | $x_k \cdot b_n$ | \dots | $x_k \cdot b_2$ | $x_k \cdot b_1$ | |
| | b_n | b_{n-1} | \dots | b_1 | | |

Die b_i sind die Koeffizienten des Restpolynoms.

Interpolation durch Polynome :

| | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|
| x_0 | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| y_0 | y_1 | y_2 | \dots | y_n |

Gegeben $n+1$ Wertepaare:

Gesucht ist eine Polynomfunktion:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

welche die Gleichungen

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 = y_2$$

.....

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

erfüllt.

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Jede echt gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m$$

lässt sich als Summe von Partialbrüchen darstellen, deren Aussehen von der Art der Nullstellen des Nennerpolynoms abhängen.

Ist z.B. x_1 eine **einfache reelle Nullstelle des Nenners**,
 x_2 eine **k-fache reelle Nullstelle des Nenners**
 $(x^2 + bx + c)^t$ ein **quadratischer Teiler des Nenners mit einem komplexen Nullstellenpaar der Vielfachheit t**,

so ergibt sich folgender Ansatz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-x_2)^k} \\ + \frac{C_1 + D_1x}{x^2 + bx + c} + \frac{C_2 + D_2x}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{C_t + D_t x}{(x^2 + bx + c)^t}$$

Die Koeffizienten A, B_i, C_j, D_j werden

- durch **Koeffizientenvergleich** (umständlich!),
- durch **Einsetzen geeigneter x-Werte aus dem Def.-Bereich** bzw.
- durch **Grenzübergang gegen die nicht zum Def.-Bereich gehörenden x-Werte**, also gegen die Nennernullstellen der Funktion $f(x)$, ermittelt, nachdem beide Seiten mit $Q_m(x)$ multipliziert wurden.

Es entsteht im „schlimmsten Fall“ ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten.

ANWENDUNGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Die Funktion $y = f(x)$ ist

- **monoton wachsend in (a,b)**, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist;
- **monoton fallend in (a,b)**, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist;
- **konvex in (a,b)**, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist;
- **konkav in (a,b)**, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist;

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0

- **ein relatives (lokales) Maximum**, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist;
- **ein relatives (lokales) Minimum**, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist;

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, \dots , $f^{(k)}(x_0) = 0$ und $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$,
so handelt es sich um

- ein lokales Extremum, wenn k+1 **gerade** ist (Max für <0, Min für >0);
- einen **Horizontalwendepunkt**, wenn k+1 **ungerade** ist.

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0

- **einen Wendepunkt**, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist.

NEWTON – VERFAHREN

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

⋮
⋮
⋮

Allgemein:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

Abbruch des Verfahrens, wenn $|x_{n+1} - x_n|$ „klein genug“ ist!

BERECHNUNG VON GRENZWERTEN NACH BERNOULLI-DE L'HOSPITAL

Wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
und $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$ (auch $g = \infty$ bzw. $g = -\infty$ ist zugelassen) ist,

dann existiert auch der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g.}$$

Analoge Regeln gelten für linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte und auch für Grenzwerte des Typs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Hinweis:

Oft können auch andere unbestimmte Ausdrücke – wie z.B.

$$\boxed{„0^0“ , „\infty^0“ , „0^\infty“ , „0 \cdot \infty“ , „\infty - \infty“}$$

usw.

– nach geschickten Umformungen in eine der oben behandelten Formen gebracht werden, um so den Grenzwert zu ermitteln.

KURVENDISKUSSION

für $y=f(x)$

1. **Schnittpunkt mit der y-Achse:** $y_0 = f(0)$
2. **Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):** $f(x) = 0$ lösen
3. **Verhalten im Unendlichen:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ermitteln
(Bei gebrochenen rationalen Fkt. evtl Asymptotengleichung angeben.)
4. **Unstetigkeitsstellen** ermitteln (mit Grenzverhalten von links und von rechts;
bei Polstellen senkrechte Asymptote zeichnen)
5. **Relative Extremwerte** aus $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ ermitteln (zugehörige Funktionswerte nicht vergessen!)
6. **Wendepunkte** aus $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ (oder Zusatzüberlegung) ermitteln
(zugehörige Funktionswerte nicht vergessen!)
7. **Graph skizzieren** (gegebenenfalls geschickte Maßstäbe auf den Achsen wählen!)

DIFFERENTIALGEOMETRIE FÜR EBENE KURVEN

Darstellung einer ebenen Kurve ist möglich

- durch eine explizite Gleichung $y = f(x)$
- durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$
- durch eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$
- in Polarkoordinaten durch eine Gleichung $r = r(\varphi)$.

a) Anstieg und Tangente einer Kurve in einem Punkt

Im Punkt $(x_0; y_0)$ hat die Kurve den Anstieg

$$\tan \alpha_0 = f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{r'(\mathbf{j}_0) \sin \mathbf{j}_0 + r(\mathbf{j}_0) \cos \mathbf{j}_0}{r'(\mathbf{j}_0) \cos \mathbf{j}_0 - r(\mathbf{j}_0) \sin \mathbf{j}_0}$$

(Dabei bedeutet r' die Ableitung nach φ .)

und die Tangente $y_T(x) = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

b) Normale einer Kurve in einem Punkt

$$y_N(x) = y_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)} \cdot [x - x(t_0)]$$

c) Bogendifferential in einem Punkt der Kurve

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2} \cdot dx = \sqrt{(dx)^2 + [dy(x_0)]^2}$$

$$ds = \sqrt{[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{[r(\varphi_0)]^2 + [r'(\varphi_0)]^2} \cdot d\varphi$$

d) Krümmung k und Krümmungsradius $r = \frac{1}{|k|}$

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{2r'^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}$$

EIGENSCHAFTEN DES BESTIMMTEN INTEGRALS

1.
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt \quad \text{usw.}$$

2. Stetige Funktionen sind auf jeden Fall **integrierbar**. Darüber hinaus können aber auch unstetige Funktionen (z.B. solche mit einer Lücke oder einem endlichen Sprung) integrierbar sein.

3.
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (a \leq b \leq c)$$

4.
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5. Hat die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ die einzige (einfache) Nullstelle c , so ergibt sich die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse zu

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \right| .$$

6.
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

7. Die Dreiecksungleichung für Summen überträgt sich unter bestimmten Voraussetzungen auch auf Integrale:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

8. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung für stetige Funktionen:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(\hat{x}) \quad , \quad a < \hat{x} < b$$

Dabei ist x in der Regel nicht bekannt.

INTEGRATIONSMETHODEN

1. Linearität

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. Partielle Integration

$$\int_a^b [u(x) \cdot v'(x)] dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

3. Substitutionsmethode

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

mit $u = g(x)$
 $du = g'(x) dx$

4. Integration von Partialbrüchen

| |
|--|
| $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln x-a + C$ |
| $\int \frac{B}{(x-b)^m} dx = \frac{B}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-b)^{m-1}} + C = -\frac{B}{(m-1) \cdot (x-b)^{m-1}} + C, \quad m > 1$ |
| $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \cdot \ln x^2+px+q + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$ |

Dabei ist $4q - p^2 > 0$

FLÄCHENBERECHNUNGEN

Fläche eines Normalbereiches bzgl. der x-Achse

$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_a^{x_0} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_0}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

$y = f(x)$ und $y = g(x)$ haben in (a,b) genau einen Schnittpunkt bei x_0 .

Sektorflächenformel in Polarkoordinaten:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi \right|$$

Sektorflächenformel für eine Parameterdarstellung:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) dt \right|$$

BOGENLÄNGE

a) in kartesischen Koordinaten:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

b) für eine Parameterdarstellung:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$$

c) in Polarkoordinaten:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi$$

VOLUMEN UND MANTELFLÄCHEN VON ROTATIONSKÖRPERN

(Kurve rotiert im Intervall $[a,b]$ um die x -Achse.)

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b [f(x)] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

SCHWERPUNKTE

Flächenschwerpunkt eines Normalbereiches (bzgl. d. x -Achse)

$$x_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b x \cdot [f(x)] dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Kurvenschwerpunkt

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}, \quad y_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers (x -Achse)

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx}, \quad y_s = 0, \quad z_s = 0$$

NUMERISCHE BERECHNUNG BESTIMMTER INTEGRALE

Rechteckregel:

$$I_{N;R} = h \cdot \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

(Sehnen-) Trapez-Regel:

$$I_{N;T} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right]$$

Simpson-Regel:

$$I_{N;S} = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) \right]$$

UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Integrale über unbeschränkte Intervalle

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^a f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Integrale über unbeschränkte Funktionen

(Bei c liegt eine Polstelle vor, $a < c < b$.)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^{c-t} f(x) dx + \lim_{u \rightarrow 0} \int_{c+u}^b f(x) dx$$

(Cauchyscher) Hauptwert des uneigentlichen Integrals:

$$\text{V. p. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-t} f(x) dx + \int_{c+t}^b f(x) dx \right)$$