1.1 Formen Sie die folgenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche um!

$1,234 \qquad 145,99 \qquad 0,\bar{9}$

1.2 Berechnen Sie die folgenden Summen!

a) $\sum_{k=-3}^{2}(2k+1)$ b) $\sum_{u=0}^{4} 2u^3$ c) $\sum_{r=0}^{2}(2r)^3$ d) $\sum_{i=2}^{6} 3$ e) $\sum_{m=N}^{N+3}(2N-m)$

1.3 Berechnen Sie die folgenden Produkte!

a) $\prod_{j=2}^{5}(j+1)$ b) $\prod_{k=-8}^{16} k^7$ c) $8!$ d) $10!$

1.4 Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie!

a) $(16p+2q)-(5p-7q)$ b) $3(a+b+c)-5(a+b)-2(b-c-a)$
c) $x^9-\left(x^{3^2}-(x^3)^2\right)$ d) $20m-[(4m+2n)+(6m-n)]$

1.5 Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $(5u-(2u-3))(u-(1-u))$ b) $(a+4)(a-2)-(a+2)(a-1)$
c) $x^3-y^3-(x-y)(x^2+xy+y^2)$ d) $3x-(x-2)(-2x-1)$

1.6 Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie nach Möglichkeit!

a) $(-a-b)(a-b)$ b) $(4a^2-3)(4a^2+3)-(3a-4)^2+(5a+1)^2$

1.7 Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus!

a) $2u(u+v)-(u-v)(u+v)$ b) $192x^2y^2+216x^3y-144xy^2$

1.8 Zerlegen Sie unter Verwendung binomischer Formeln folgende Summen in Faktoren!

a) $196x^2-169y^2$ b) $(2m-n)^2-(n+2m)^2$ c) $-25x^2-100y^4+100xy^2$

1.9 Kürzen Sie soweit wie möglich!

a) $\dfrac{204a^2b^3c}{255ab^2c^3}$ b) $\dfrac{5(x-2)}{5x-2}$ c) $\dfrac{288x-288y}{432(y^2-x^2)}$

1.10 Fassen Sie zu einem Bruch zusammen!

a) $\dfrac{3}{4a}-\dfrac{2}{5b}$ b) $\dfrac{2x-3}{x^2(x+1)}-\dfrac{3-4x}{x(x+1)^2}$

1.11 Setzen Sie den Ausdruck A in den Ausdruck B ein und vereinfachen Sie!

	A	B
a)	$x = y + 1$	$x - xy$
b)	$y = \frac{1}{x} - 1$	$x - xy$

1.13 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich! Wie müssen die auftretenden Größen beschaffen sein, damit die Terme erklärt sind?

a) $2^3 - (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^3$ b) $(-x)^4 + (-2a)^4 - 2a^4 + (-3x)^4$

c) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 16(a-1)^3 - 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

1.14 Stellen Sie in der Wurzelschreibweise dar!

a) $x^{-\frac{3}{4}}$ b) $(32a^5b^{10})^{\frac{2}{5}}$ c) $(\frac{1}{x})^{-\frac{4}{8}}$ d) $9^{0,9}$ e) $a^{-0,33}$

1.15 Man schreibe die Terme ohne Wurzelzeichen!

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $\dfrac{a^3\sqrt[3]{a^5}\,b}{\sqrt{ab}}$ c) $\sqrt[4]{xy^3} \cdot \sqrt[6]{x^3y}$

1.16 Man vereinfache!

a) $\left(\sqrt[3]{a^{15}}\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt[4]{3ab^2} \cdot \left(\sqrt[8]{27a^{-2}b^5}\right)^{\frac{3}{2}}$

1.17 Man schreibe die Ausdrücke ohne Bruchstrich und ohne Wurzelzeichen!

a) $\dfrac{8xya^2b^7}{4ab^{15}x^2y^3}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}}$ c) $\dfrac{ab\sqrt{c}}{\sqrt{ab}\,c}$

1.18 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf!

a) $\dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{3x+1}{4} + \dfrac{5x+1}{8} = 1$ b) $\dfrac{1}{x} + a = \dfrac{a}{x} + 1$

c) $(x+1)(x+a) + b = 2a + (x+2)(x+b)$ d) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}}$

1.19 Lösen Sie folgende Formeln nach den angegebenen Größen auf!

a) $s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ nach v_0 und g b) $v = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ nach s_1 und t_1

c) $E_{\text{pot}} = mg(h_2 - h_1)$ nach h_2 und h_1

1.20 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen!

a) $\dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{3x+1}{4} + \dfrac{5x+1}{8} \le 1$ b) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6} \le \dfrac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}}$

1.21 Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$ b) $\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$

c) $24x^2 + 27 = 54x$ d) $(2x-3)^2 - (x-5)^2 = 80$

1.22 Geben sie alle reellen Lösungen an!

a) $(x^2-5)^2 + (x^2-1)^2 = 40$ b) $(x^2-10)(x^2-3) = 78$

1.23 Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen und Ungleichungen!

a) $|x-3| = 5$ b) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$

c) $|x-2| < 3$ d) $|3x-5| > 2|x+2|$

1.24 Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen!

a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$ b) $9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2}$

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$ d) $(3\sqrt{x}-1)^2 + (4\sqrt{x}-7)^2 = (5\sqrt{x}-6)^2$

1.25: Berechnen Sie den Betrag und das Argument der komplexen Zahl z!

a) $z = j + 1$ b) $z = \sqrt{3} + j$ c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$

1.26: Bringen Sie die komplexen Ausdrücke in die Form $a + bj$.

$z_1 = (2+3j)(5-j)$, $z_2 = \frac{3+2j}{1-j}$, $z_3 = \frac{5+j}{2+3j} + \frac{6+3j}{4-3j}$

1.27: Wandeln Sie in die arithmetische Form um !

$z_1 = 4(\cos 120° + j\sin 120°)$ $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

1.28: Bringen Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2j$, $z_2 = -1-j$ in die trigonometrische und in die exponentielle Darstellungsform !

1.29: Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 5 = 12j$!

1.30: Von der komplexen Zahl z bestimme man den Real- und Imaginärteil!

a) $z = \frac{1}{1+j}$ b) $z = \frac{3+2j}{1+j}$ c) $z = \left(2e^{\frac{\pi}{6}\cdot j}\right)^{18}$

2.1: Man stelle den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar! Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt auch an einer Skizze!

2.2: Man bilde rechnerisch und graphisch die Summe und die Differenz der Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$!

2.3: Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind zu berechnen:

a) die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$ und $\vec{e}_b$, b) die Projektionsvektoren $\vec{b}_a$ und $\vec{a}_b$!

2.4: Im Punkt $D(1;3;-1)$ ist ein Haken befestigt, von dem aus drei Stahlseile nach den Punkten $A(2;1;1)$, $B(-7;4;3)$ und $C(-1;9;2)$ gespannt sind. Die Zugkräfte in den Seilen haben folgende Beträge:

$F_A = 21000N$, $F_B = 9000N$, $F_C = 14000N$.

Berechnen Sie die in D angreifende Gesamtkraft (Komponenten und Betrag)!

2.5: Durch zwei Vektoren wird ein Dreieck aufgespannt, indem man sie durch Pfeile mit demselben Anfangspunkt repräsentiert und deren Endpunkte miteinander verbindet. Für das auf diese Weise durch

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

aufgespannte Dreieck berechne man

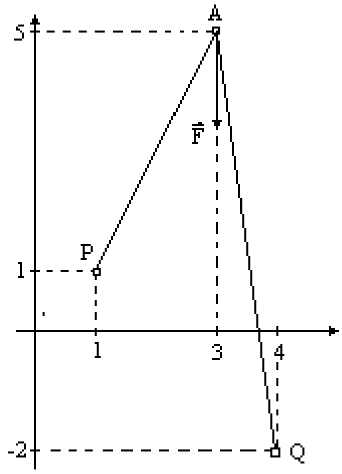
a) die Länge der drei Seiten a, b, c (Bezeichnung entspricht den Vektoren),

b) die Seitenhalbierende s_b ,

c) den Winkel γ zwischen a und b, d) den Flächeninhalt!

2.6: Eine Kraft $\vec{F}$ der Größe $\left|\vec{F}\right| = 6\ N$ bewege einen punktförmigen Körper von $P_1(2,-2,1)$ nach $P_2(3,4,5)$, gemessen in m (Meter). $\vec{F}$ besitze die Richtung des Vektors $\vec{r} = (-1,3,2)^T$. Welche Arbeit W verrichtet $\vec{F}$?

2.7: Ein Gerüst, bestehend aus zwei geraden, unterschiedlich langen und im Punkt $A(3;5)$ verbundenen Balken, trage in A eine Last von 2700 N. Die beiden Balken sollen in den Punkten $P(1;1)$ und $Q(4;-2)$ stufenförmig aufliegen.



Welchen Druckkräften sind die beiden Balkenquerschnitte ausgesetzt?

Wie groß sind die senkrecht gerichteten Auf lagedruckkräfte sowie die waagerecht wirkenden Seitendrücke in den Auflagepunkten der (gewichtslos gedachten) Balken?

2.8: Stellen Sie folgende Vektoren in der Form $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_a$, mit $|\vec{e}_a| = 1$ dar.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$

2.9: Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$, $\vec{b} = -\vec{e}_x - 10\vec{e}_z$

2.10: Bilden Sie mit den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

die folgenden Vektorprodukte:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c})$

2.11: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Wie müssen y und z bestimmt werden, damit $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

2.12: Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer gemeinsamen Ebene?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

2.13: Die beiden Ebenen $E_1 : x - 3y + 3z = -2$ und $E_2 : 3x + 2y + z = 5$ schneiden sich in einer Geraden, deren Gleichung (in Parameterform) zu bestimmen ist.

2.14: Unter Zugrundelegung eines kartesischen Bezugssytems sind im $\mathbb{R}^3$ zwei Punkte $P_1(-1,2,-1)$, $P_2(1,3,2)$, sowie eine Gerade g mit der Parametergleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$, t ist beliebig reell, gegeben.

P_3 sei derjenige Punkt auf g, für den das Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 minimalen Flächeninhalt hat.
Wie lauten die Koordinaten von $P_3 \in g$ und wie groß ist der Inhalt des flächenkleinsten Dreiecks?

2.15: Die Punkte $P_1(0,0,1)$, $P_2(1,-1,0)$ und $P_3(-2,1,1)$ spannen eine Ebene E auf. Geben Sie E in der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ an und bestimmen Sie den Abstand q des Punktes $Q(4,5,3)$ von dieser Ebene!

3.1: Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme:

a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \qquad x_1 + x_2 = 0 \qquad 2x_2 + 5x_3 = 0$

b) $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2: Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 17 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 + u_3 + 2u_4 &= 5 \\ -2u_1 - u_2 + 2u_3 - u_4 &= -9 \\ 4u_1 - 2u_2 + u_3 - 2u_4 &= -7 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 + 3u_4 &= 14 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

e) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1{,}5 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4{,}5 \end{array}$

f) $\begin{array}{rcrcrcr} 0{,}5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -0{,}5 \\ 2x_1 & + & 1{,}5x_2 & & & = & 1 \\ -0{,}5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2{,}5 \end{array}$

g) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -21 \end{array}$

h) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & -2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 8 \end{array}$

3.3: Zeigen Sie, dass das homogene lineare (3, 3) - System

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nichttriviale Lösungen besitzt. Wie lauten die Lösungen?

3.4: Für welche reellen Werte des Parameters besitzt das homogene lineare Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

a) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.5: Berechnen Sie die Linearkombination $x = \lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)}$!

a) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$

b) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

c) $a^{(1)^T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)^T} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = -0{,}2$ und $\lambda_2 = -0{,}3$

3.6: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

hat u.a. die Lösung: $x^{(1)} = (2,-1,0)^T$, $x^{(2)} = (3,1,1)^T$

a) Überzeugen Sie sich davon durch eine Einsetzprobe!

b) Geben Sie, ohne das System zu lösen, mindestens 2 weitere Lösungen an!

c) Nennen Sie eine nichttriviale Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems!

4.1: Gegeben sind die Matrizen $A_{2,3}$, $B_{2,4}$, $C_{4,3}$ und $D_{3,2}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind erklärt und welches Format hat in diesen Fällen die Ergebnismatrix?

a) $A+B$ b) $A+3D^T$ c) ABC d) BAD e) $C(A+D^T)$

4.2: Mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist zu berechnen:

a) $2A+3B$ b) $B-2A$ c) AB^T d) BA^T e) $(A+B)C$

4.3: Berechnen Sie unter der Verwendung des Falk- Schemas die Matrizenprodukte $A \cdot A = A^2$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und $B \cdot B = B^2$ (soweit diese überhaupt existieren) für:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie ferner anhand dieser Beispiele, dass i.a. $A \cdot B \neq B \cdot A$ ist.

5.1: Von welchen der folgenden Matrizen lässt sich eine Determinante berechnen? Führen Sie die Berechnung durch!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$!

b) Berechnen Sie AA^T und A^TA!

5.3: Welchen Wert besitzen die 3-reihigen Determinanten?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -10 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

5.4: Für welche reellen Parameter sind die Determinanten gleich Null?

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

5.5: Für beliebige reelle Zahlen x, y, z hat die VANDERMOND'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

den Wert $(x-y)(y-z)(z-x)$. Beweisen Sie diese Aussage!

5.6: Man berechne sämtliche Adjunkten zu den Elementen der Matrix $F = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und gebe die Inverse von F an!

5.7: Um eine in einer Matrix A zusammengefaßte sensible Datenmenge bei einer DFÜ zu schützen, kann man statt dessen eine Matrix $C = A \cdot B$ übertragen, wobei B eine nur dem Absender und dem Empfänger bekannte reguläre Matrix ist.

Mit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ verschlüssele man die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und entschlüssele die beim Empfänger angekommene Matrix $C = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$!

5.8: Berechnen Sie von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren!

Kurz-Lösungen

1.1 $\frac{1234}{1000}$ $\frac{14599}{100}$ 1 1.2 a) 0 b) 200 c) 72 d) 15 e) $4N-6$

1.3 a) 360 b) 0 c) 40320 d) 3.628.800

1.4 a) $11p + 9q$ b) $-4b + 5c$ c) x^6 d) $10m - n$

1.5 a) $6u^2 + 3u - 3$ b) $a - 6$ c) 0 d) $2x^2 - 2$

1.6 a) $-a^2 + b^2$ b) $16a^4 + 16a^2 + 34a - 24$ 1.7 a) $(u + v)^2$ b) $24xy(8xy + 9x^2 - 6y)$

1.8 a) $(14x - 13y)(14x + 13y)$ b) $-8mn$ c) $-25(x - 2y^2)^2$

1.9 a) $\frac{4ab}{5c^2}$ b) $\frac{5(x-2)}{5x-2}$ c) $-\frac{2}{3(x+y)}$ 1.10 a) $\frac{15b - 8a}{20ab}$ b) $\frac{6x^2 - 4x - 3}{x^2(x+1)^2}$

1.11 a) $1 - y^2$ b) $2x - 1$

1.13 a) -8 b) $82x^4 + 14a^4$ c) $6(a-1)^3$

1.14 a) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ b) $4a^2b^4$ c) $\sqrt{x}$ d) $\sqrt[10]{9^9}$ e) $\frac{1}{\sqrt[100]{a^{33}}}$

1.15 a) $x^{\frac{7}{8}}$ b) $a^{\frac{25}{6}} b^{\frac{1}{2}}$ c) $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{11}{12}}$ 1.16 a) $a^{\frac{15}{2}}$ b) $3^{\frac{13}{16}} a^{-\frac{1}{8}} b^{\frac{23}{16}}$

1.17 a) $2x^{-1}y^{-2}ab^{-8}$ b) $a^{\frac{1}{6}} b^{-\frac{1}{6}}$ c) $(ab)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}}$

1.18 a) $\frac{1}{19}$ b) $x = 1$ falls $a \neq 1$, $x \neq 0$ beliebig, falls $a = 1$

c) $x = \begin{cases} \frac{a+b}{a-b-1} & \text{falls } a - b - 1 \neq 0 \\ \text{beliebig} & \text{falls } a = \frac{1}{2} \text{ und } b = -\frac{1}{2} \\ \text{keine Lösung} & \text{falls } a - b - 1 = 0 \text{ und } a + b \neq 0 \end{cases}$ d) $x = 12$

1.19 a) $v_0 = \frac{1}{t}\left(s + \frac{1}{2}gt^2\right)$ $g = 2\frac{v_0 t - s}{t^2}$

b) $s_1 = s_2 - v(t_2 - t_1)$ $t_1 = \frac{vt_2 + s_1 - s_2}{v}$

c) $h_1 = h_2 - \frac{E_{pot}}{mg}$ $h_1 = h_2 + \frac{E_{pot}}{mg}$

1.20 a) $x \leq \frac{1}{19}$ b) $L = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [12, \infty)$

1.21 a) $x_1 = 2, x_2 = -7$ b) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$ 1.22 a) $x_1 = \sqrt{7}, x_2 = -\sqrt{7}$

c) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$ d) $x_1 = 6, x_2 = -\frac{16}{3}$ b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

1.23 a) $x_1 = -2; x_2 = 8$ b) $x_1 = -7; x_2 = -\frac{1}{3}$

c) $(-1, 5)$ d) $(-\infty, \frac{1}{5}) \cup (9, \infty)$

1.24 a) $\varnothing$ b) $\frac{23}{5}$ c) 17 d) 49

1.25a) $|z| = \sqrt{2}$; $\arg(z) = 45°$ b) $|z| = 2$; $\arg(z) = 30°$ c) $|z| = 1$; $\arg(z) = 120°$

1.26: $z_1 = 13 + 13j \qquad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}j \qquad z_3 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}j$

1.27: $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}j \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - j$

1.28: $z_1 = 2j\sin\frac{\pi}{2} = 2e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 225° + j\sin 225°) = \sqrt{2}\,e^{j\frac{5\pi}{4}}$

1.29: $z_1 = 2 + 3j$, $z_2 = -2 - 3j$

1.30: a) $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$

b) $z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{5}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$

c) $z = -262144 = \mathrm{Re}(z)$, $\quad \mathrm{Im}(z) = 0$

2.1: $\vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{5}{3} \cdot \vec{b}$

2.2: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.3a) $\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,67 \\ -0,67 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{e}_b = \begin{pmatrix} -0,80 \\ 0,27 \\ 0,53 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 1,07 \\ -0,36 \\ -0,71 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_a = \begin{pmatrix} -0,56 \\ -1,11 \\ 1,11 \end{pmatrix}$

2.4:

$$\overrightarrow{F}_A = \begin{pmatrix} 7000 \\ -14000 \\ 14000 \end{pmatrix} N, \quad \overrightarrow{F}_B = \begin{pmatrix} -8000 \\ 1000 \\ 4000 \end{pmatrix} N, \quad \overrightarrow{F}_C = \begin{pmatrix} -4000 \\ 12000 \\ 6000 \end{pmatrix} N$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_B + \overrightarrow{F}_C = \begin{pmatrix} -5000 \\ -1000 \\ 24000 \end{pmatrix} N, \qquad \left|\vec{F}\right| = 24536\ N$$

2.5a) $a = 3 \qquad b = 3,7 \qquad c = 5,7$

b) $\overrightarrow{s_b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$s_b = \left|\overrightarrow{s_b}\right| = 4,2$

c) $\gamma = 116{,}5°$ d) $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 3{,}7 \cdot 0{,}89 \approx 5$

2.6: $W = 6 \cdot \sqrt{53} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{14}}\ Nm = 40{,}1\ Nm$

2.7: $\overrightarrow{F}_I = \begin{pmatrix} -300\ N \\ -600\ N \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}_{II} = \begin{pmatrix} 300\ N \\ -2100\ N \end{pmatrix}$

2.8: a) $\overrightarrow{e_a} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \sqrt{21}$ b) $\overrightarrow{e_a} = \dfrac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\alpha = \sqrt{89}$

2.9: a) $\alpha = 79{,}9°$ b) $\alpha = 157{,}9°$

2.10: a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

2.11: $y = 16,$ $z = 67$

2.12: Ja! 2.13: $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$

2.14: $P_3 = P_3(0,2,3)$, mit $A_{\min} = \frac{1}{2}\sqrt{42}\ \ FE$

2.15: $E : x + 2y - z = -1 \quad \Rightarrow q = \dfrac{4 + 2 \cdot 5 - 3 + 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \approx 4{,}9.$

3.1: In beiden Fällen existiert nur die triviale Lösung

3.2a) $(3,-4,2)^T$ b) $(0,-1,3)^T$ c) $(1,2,-1,3)^T$ d) $(0.5,-0.5,1.5)^T$

e) $(-1,2.5,-2)^T$ f) $(-1,2,2)^T$

3.3: $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda,$ $\lambda \in R$

3.4: a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ b) $\lambda_{1/2} = \pm 2$

3.5a) $x = 2a^{(1)} + (-3)a^{(2)} = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \end{pmatrix}$

b) $x = -a^{(1)} - a^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $x = \begin{pmatrix} -1,8 \\ -0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$

3.6b) z.B.: $x^{(3)} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x^{(4)} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) z.B.: $x_{\text{hom}} = x^{(1)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.1a), c), d), e) nein b) (2,3)

4.2a) $\begin{pmatrix} -5 & 8 & -12 \\ 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -4 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 17 & 1 & 26 \end{pmatrix}$

4.3a) $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 34 & 18 \\ 8 & 32 & 17 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

5.1: $\det(A) = -1, \ \det(C) = -12$

5.2a) $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.3: a) 0 b) 264 c) 454

5.4: a) $\lambda_1 = 1{,}562, \quad \lambda_2 = -2{,}562$ b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

5.6:

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\ A_{12} = -\det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,\ A_{13} = \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -6$$

$$A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1,\ A_{22} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,\ A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \det\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4,\ A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -12,\ A_{33} = \det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 23$$

$$F^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -12 & 23 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 12 \\ 6 & 4 & -23 \end{pmatrix}$$

5.7: a) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 2 & -2 \\ 15 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$

5.8: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = 1$

x_1	x_2	x_3
−2	5	−3
1	−1	1
(1)	−4	2

−3	1
3	−1

$\underline{x^{(1)} = (-2, 1, 3)^T}$

$\lambda_2 = -1$

x_1	x_2	x_3
0	5	−3
1	1	1
(1)	−4	4

5	−3
5	−3

$\underline{x^{(2)} = (-8, 3, 5)^T}$

$\lambda_3 = 2$

x_1	x_2	x_3
−3	5	−3
1	−2	1
(1)	−4	1

−7	0
2	0

$\underline{x^{(3)} = (-1, 0, 1)^T}$