Übertragungstechnik I und II

0 vorab ...

0.1 Voraussetzungen, Basis
0.2 Struktur der Vorlesungsreihe

0 vorab ...

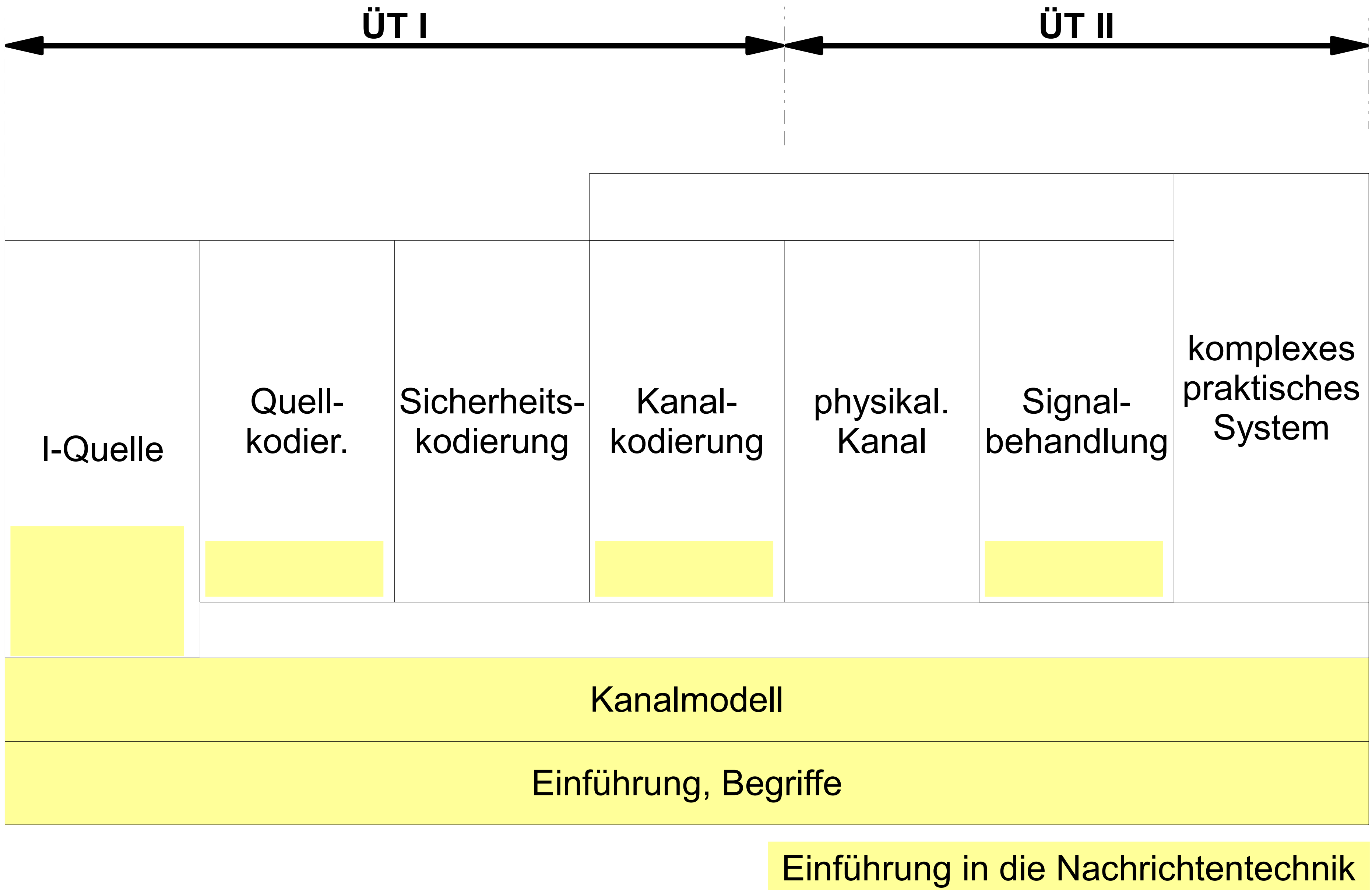
0.1 Voraussetzungen, Basis

- Mathematik – sowieso
- Elektrotechnik – Wechselstromtechnik, gelegentlich
- Signale und Systeme – Systemtheorie – spielt auch eine Rolle

- Einführung in die Nachrichtentechnik – ganz direkt

0 vorab ...

0.2 Struktur der Vorlesungsreihe



Übertragungstechnik I und II

1 Einführung

1.1 Einordnung des Stoffgebietes, Voraussetzungen

1.2 einige Grundbegriffe

1 Einführung
1.1 Einordnung des Stoffgebietes, Voraussetzungen

- Womit beschäftigen wir uns in diesem Modul?
- theoretische Grundlagen und praktische Verfahren
  für die Übertragung von Nachrichten
- Bindeglied zwischen theoretischen Grundlagen der Informationsübertragung
  und den realen Verfahren und Gerätesystemen

1.2 einige Grundbegriffe

- Nachricht
- Signal
- Information
- Redundanz
- Kode, Kodierung
- Symbol
- Alphabet
- Modulation
- Basisband
- Passband

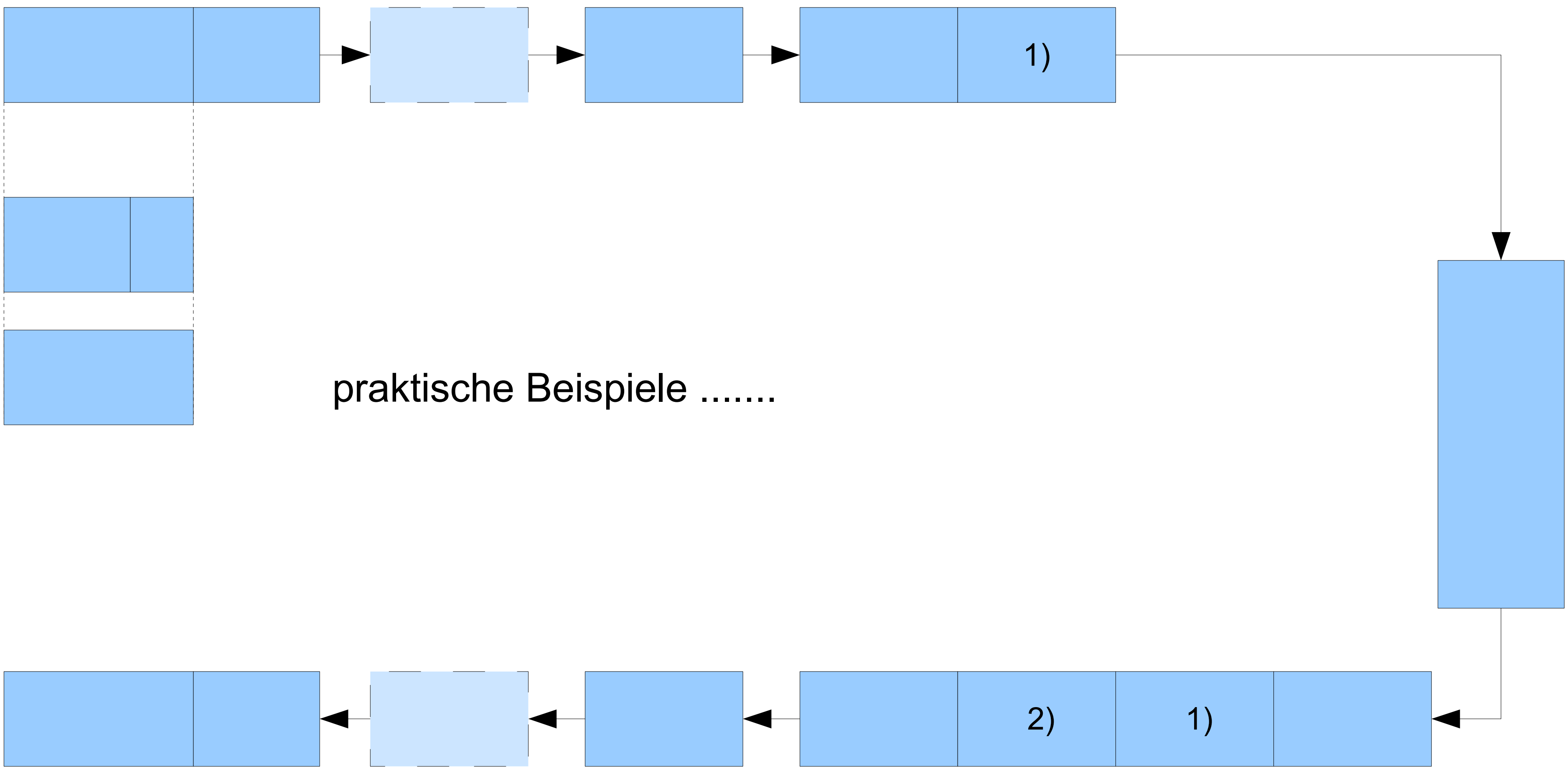
Übertragungstechnik I und II

2 Kanalmodell

2.1 Das Modell und seine Abschnitte – wie war das noch?

2 Kanalmodell
2.1 Das Modell und seine Abschnitte

Nachrichtenquelle



Nachrichtensenke

1) klassisch nur bei Passbandübertragung, hier immer
2) bei digitalen Signalen, fallweise mit 1) gekoppelt

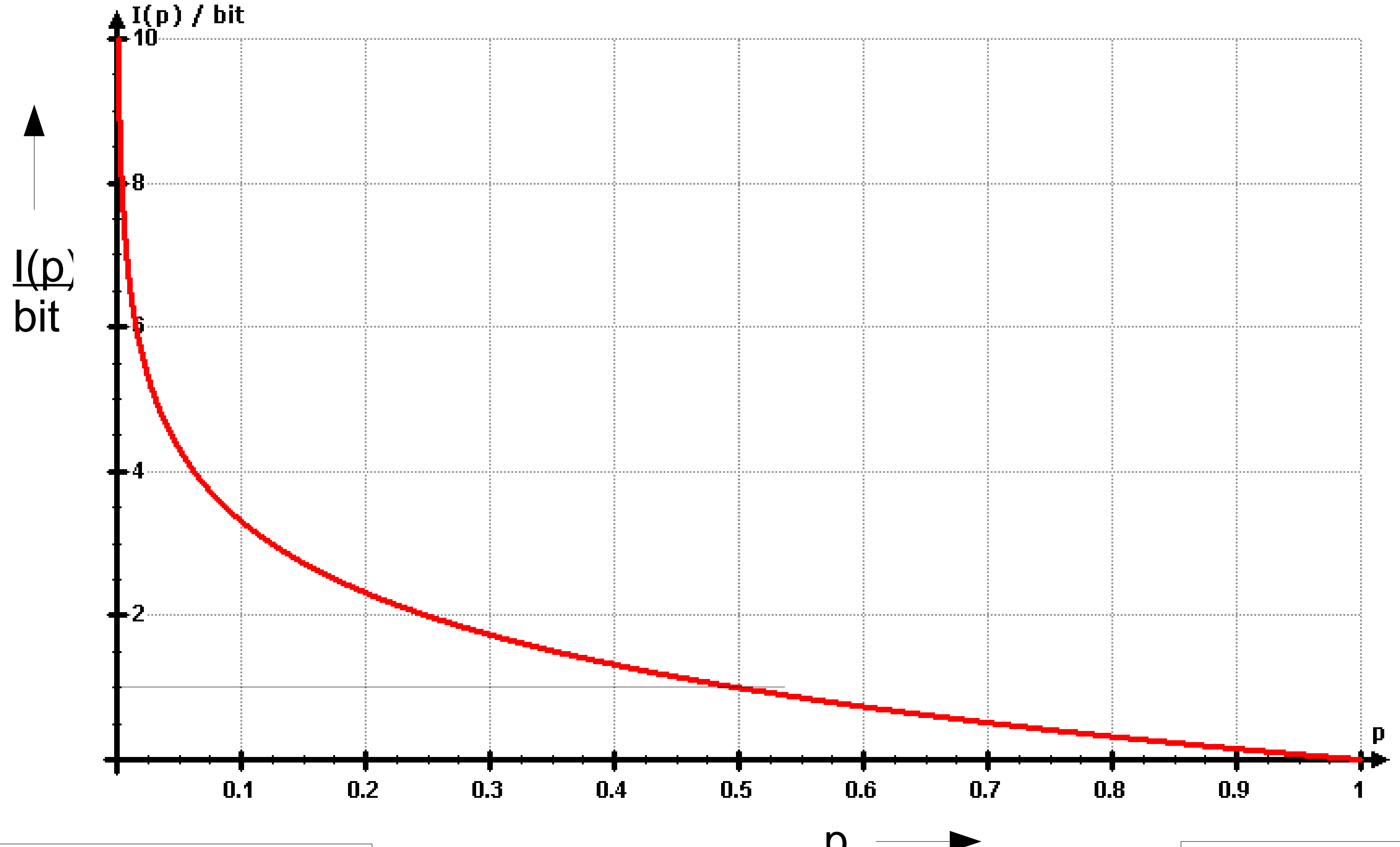
Übertragungstechnik I und II

3 Nachrichtenquellen
- 3.1 gedächtnislose Quellen - Wiederholung
- 3.2 Quellen mit Gedächtnis
- 3.3 Quellkodierung
  - 3.3.1 Ziele
  - 3.3.2 einige Verfahren

3 Nachrichtenquellen
3.1 gedächtnislose Quellen - Wiederholung (1)

- Information als Funktion von p

Definition: **I(p) = ...** Maßeinheit Sh (Shannon), früher bit



Ereignis ....

Ereignis ....

3.1 gedächtnislose Quellen - Wiederholung (2)

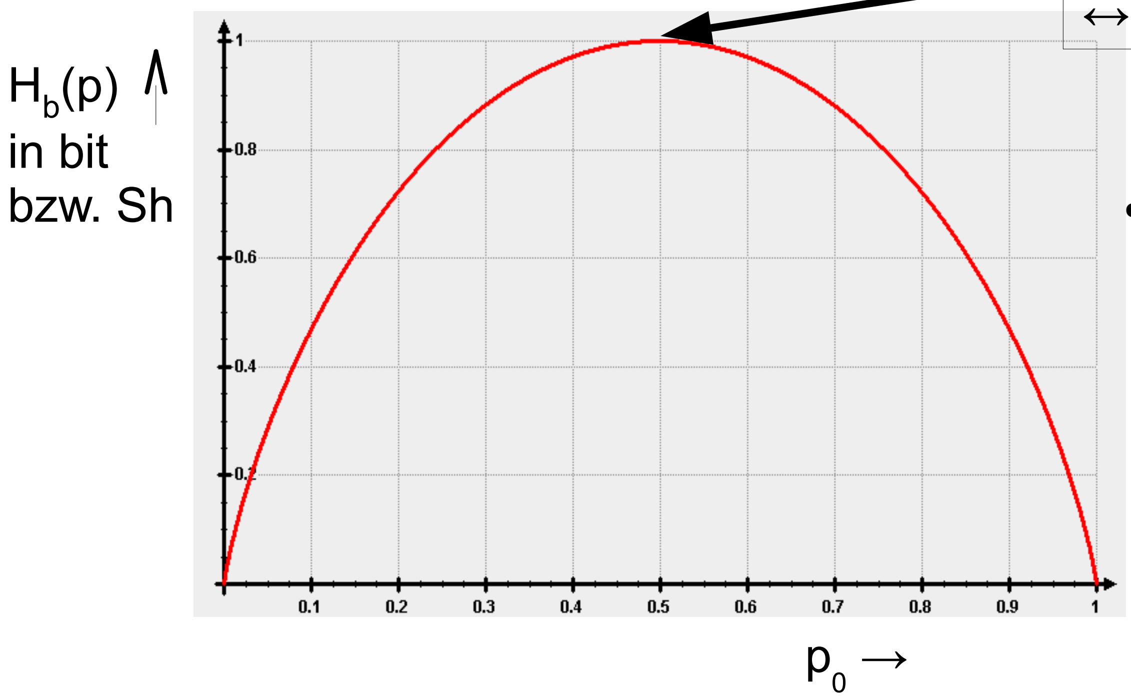
- Beispiel: Entropie der gedächtnislosen Binärquelle

$X=(0, 1) \qquad p_0=p\ ,\ p_1=$ ....

$$H_b(p)= \text{.......................................}$$

Shannonsche Funktion

maximale Entropie
↔ maximale Unsicherheit



- Antworten:
  - 1 ja/nein-Frage je Zeichen
  - 1 bit je Zeichen

3.1 gedächtnislose Quellen - Wiederholung (3)

- Entropie: ....
  ....

  für diskrete, gedächtnislose Quelle gilt

  $H(X)=$ .... oder auch: $H(X)=$ ....

  X: Quelle mit Zeichenvorrat X = $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$
  und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, ..., p_N$

- H_0

- R

- r

3.1 gedächtnislose Quellen - Wiederholung (4)

- gedächtnislose Quellen
  - Auftretenswahrscheinlichkeit für jedes Symbol ist .... von den vorherigen Zeichen
  - Auf den vorherigen Bildern ist das teils Voraussetzung für diverse Formeln.

3.2 Quellen mit Gedächtnis (1)

- Quellen mit Gedächtnis
  - Die Auftretenswahrscheinlichkeit für das Symbol y ist .... vom vorhergehenden Symbol x

    ... s s s s s s s s s s ...   p(y) ist .... von x

    x y

    → t

  - Beispiel:

  - mathematisch modellierbar über Markoffketten
    Markoffkette n-ter Ordnung
    n gibt Weite der Abhängigkeit
    n=1 bedeutet, Symbol y ist ....

  - Wir untersuchen hier die Markoffkette 1. Ordnung

3.2 Quellen mit Gedächtnis (2)

<u>bekannt</u>: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Paares x_i y_j

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(x_i, y_j)} = \boxed{P(y_j | x_i)} \cdot P(x_i)$$

... s s s s s s s s ...

x y

H(X,Y)

<u>gesucht:</u> Entropie H

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P(x_i, y_j) \cdot ld(P(x_i, y_j)) \quad \text{in Sh/Paar}$$

. . .

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{P(y_j|x_i) \cdot P(x_i) \cdot ld(P(y_j|x_i))}_{} + \underbrace{P(y_j|x_i) \cdot P(x_i) \cdot ld(P(x_i))}_{}$$

bedingte Entropie H(Y|X) mit $\sum_{j=1}^{N} P(y_j|x_i) = 1$ **(?)**

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P(y_j|x_i) \cdot P(x_i) \cdot ld(P(y_j|x_i))$$

(?)

$$\ldots\ldots = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \cdot ld(P(x_i))$$

3.2 Quellen mit Gedächtnis (3)

bedingte Entropie H(Y|X)

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(y_j|x_i)\cdot P(x_i)\cdot ld(P(y_j|x_i))$$

Entropie H(X)
(zu **ergodischer** Wahrscheinlichk.)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i)\cdot ld(P(x_i))$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

Entropie für XY zusammen

$$H(X) = H$$

$$H(Y|X) < H$$

....
wäre gleich, wenn keine Abhängigkeit!
aus Übergangswahrscheinlichkeit X→Y

$$H(Y|X) = H(Y) - H(X;Y)$$

$$H(X;Y)$$

Synentropie (Entropieverlust)

$$H(Y;X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i, y_j)\cdot ld\left(\frac{P(x_i)\cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)}\right)$$

3.2 Quellen mit Gedächtnis (4)

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$ von Seite zuvor

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X;Y)$$

Betrachtung passt auch auf Verbundquellen,
Entropie für beide parallele Quellen bzw. Zeichenpaar
→ Je Zeichen Mittelwert daraus, denn ...

... s s s s s s s s ...
x y

H(X,Y) für 2 Zeichen

$$H = H(X,Y)/2$$ ....

Was brauchen und „haben“ wir? (vergleiche 3.2(2))

3.2 Quellen mit Gedächtnis (5)

Matrix der .... (auch bedingte Wahrscheinlichkeiten)
P für „Symbol y_j folgt auf Symbol x_i“ („P für Symbol y_j wird bei Symbol x_i gesendet“)

$$\left\| P(y_j|x_i) \right\| = \begin{array}{cc} & \text{Zeilensummen} \\ \left\| \begin{matrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \cdots & P(y_N|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \cdots & P(y_N|x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ P(y_1|x_N) & P(y_2|x_N) & \cdots & P(y_N|x_N) \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ \_\_\_ \end{matrix} \end{array}$$

<u>für binäre Quelle</u>

$$\left\| P(y_j|x_i) \right\| = \left\| \begin{matrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} P(y_1|x_1) & \\ & P(y_2|x_2) \end{matrix} \right\|$$

ergodische Wahrscheinlichkeiten

$$P(x_1) = \rule{6cm}{0.4pt} = 1 - P(x_2)$$

$$P(x_2) = \rule{6cm}{0.4pt} = 1 - P(x_1)$$

3.2 Quellen mit Gedächtnis (6)

Ist bei gleicher ergodischer Symbolwahrscheinlichkeit die Entropie einer Quelle mit Gedächtnis **immer** niedriger, als die einer Quelle ohne Gedächtnis?

Wenn die Matrix mehr unterschiedliche Werte aufweist, als es unterschiedliche ergodische Wahrscheinlichkeitswerte gibt, kann das vermutet werden.

Warum???

Was bringt die...

Untersuchung an Markoff-Quelle 1. Ordnung mit Alphabet von 2 Symbolen?

$$P(y_j)=\sum_{i=1}^{2} P(x_i)\cdot P(y_j|x_i)$$

rekursive Gleichung

$$P(x_j)=P(y_j)$$

wegen Rekursivität

$$P(x_j)=\sum_{i=1}^{2} P(x_i)\cdot P(y_j|x_i)$$

nach einigen Umformungen:
Die ergodischen Wahrscheinlichkeiten sind in den Matrixwerten enthalten

3.2 Quellen mit Gedächtnis (7)

Die Matrix enthält nur einen unabhängigen Wert, wenn

- beide Zeilen identisch sind → ohne Gedächtnis

- beide Zeilen den selben unabhängigen Wert enthalten, nur an unterschiedlichen Stellen

$$P(y_1|x_1)=P(y_2|x_2)$$
$$P(y_1|x_2)=P(y_2|x_1)$$
→ alle symmetrischen Matritzen

ergodische Wahrscheinlichkeit symmetrischer Matritzen

$$P(x_2) = \frac{P(y_2|x_1)}{P(y_2|x_1)+P(y_2|x_1)} = 1/2 = 1-P(x_1)$$

Wie groß ist die bedingte Entropie H(Y|X) in solchen Fällen?

$$H(Y|X) = P(y_1|x_1)\cdot ld\, P(y_1|x_1) + P(y_2|x_1)\cdot ld\, P(y_2|x_1)$$

Nur bei $P(y_1|x_1) = P(y_2|x_1) = 1/2$ ist H(Y|X) = H(X)

3.2 Quellen mit Gedächtnis (8)

Ist bei gleicher ergodischer Symbolwahrscheinlichkeit die Entropie einer Quelle mit Gedächtnis immer niedriger als die einer Quelle ohne Gedächtnis?

Ja!

Was bedeutet das?

3.3 Quellkodierung (1)

- 3.3.1 Ziele und Wege:

  Ziel ① .... / ....

  Ziel ② und / oder günstige technische Realisierung Beispiele

  Weg

Eine **Primärquelle** wird auf eine **Sekundärquelle** abgebildet. Bild

(Gruppen von) ←→ Symbole der ....

Symbole der ....

Kodeworte := Gruppen von Elementarsymbolen

zu Ziel ①

- Fundamentalsatz der Optimalkodierung nach SHANNON:

  'Symbolgruppen zu je z Symbolen einer redundanten Primärquelle mit der Entropie H lassen sich stets durch Binärworte so kodieren,daß die mittlere Anzahl der pro Primärsymbol aufgewendeten Binärsymbole beliebig nahe bei H liegt, sofern z hinreichend groß gewählt wird.'

  [D. Kreß: Theoretische Grundlagen der Signal- und Informationsübertragung, 1977]

3.3 Quellkodierung (2)

- 3.3.1 Ziele und Wege:

  zu Ziel ① - Wirkung 1

  - Gruppierung von Symbolen der Primärquelle → Sekundärquelle hat günstigere Statistik, ...

    Beispiel

  zu Ziel ① - Wirkung 2

  - Elementaralphabet mit weniger Symbolen und somit mehr Schritten, Bei der Ersatzquelle der Elementarsymbole fallen H und H_0.

    Wenn H weniger sinkt als H_0, dann sinkt auch r. (Formeln)

3.3 Quellkodierung (3)

- 3.3.1 Ziele und Wege

  zu Ziel ②

  - Elementarsymbole nach günstiger technischer Realisierbarkeit wählen;
    Typisch ist die Kodierung mittels binärer Elementarsymbole.
    <u>Warum?</u>

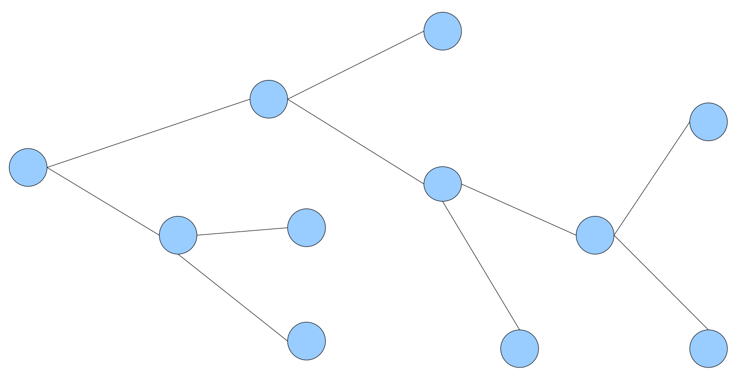
    Außer im trivialen Fall von 2 Symbolen im Alphabet der Primärquelle, benötigt die Sekundärquelle Kodeworte aus mehr als einem Elementarsymbol.

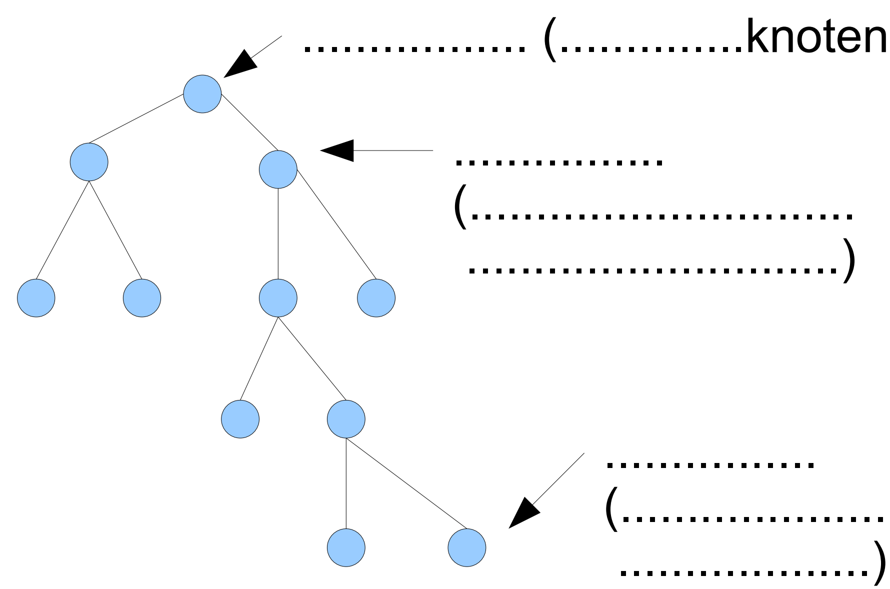
    <u>Sekundärkode:</u>

  - Alphabet (Kode) mit gleichlangen Worten
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten
    (mit Trennzeichen oder Präfixkode)

3.3 Quellkodierung (4)

- 3.3.2 einige Verfahren - ein wichtiges Werkzeug: der <u>Binär</u>baum
  - stammt aus der Graphentheorie
  - Baum



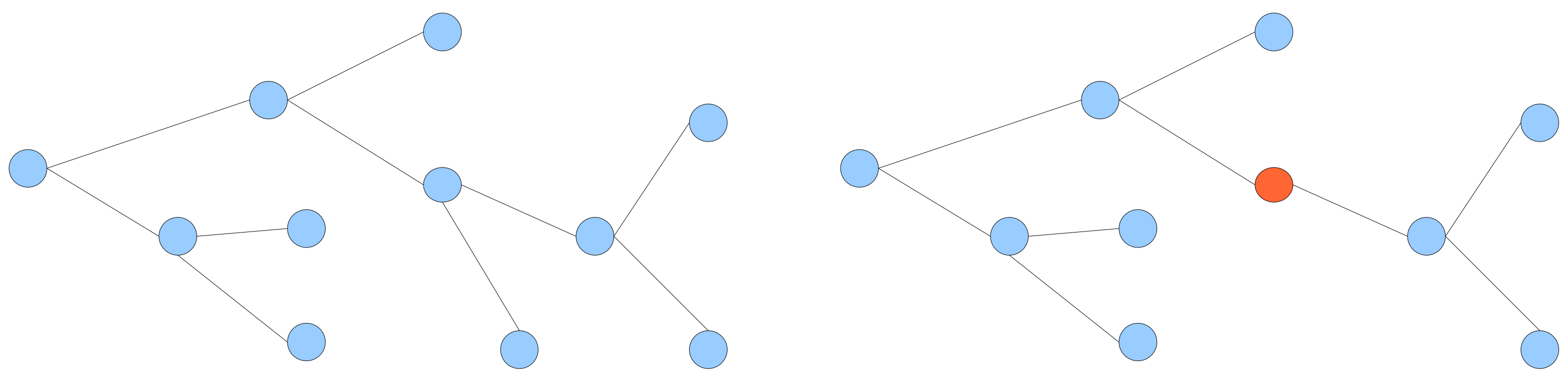


  - Jeder .... hat entweder ein oder zwei .... oder ist ....
  - Jede Verzweigung steht hier für eine binäre Stelle in einem Kodewort.
  - Die Verzweigung ist binär – ein Kindknoten entspricht „0“ (nein) und der andere Kindknoten „1“ (ja).

(Beispiel)

3.3 Quellkodierung (5)

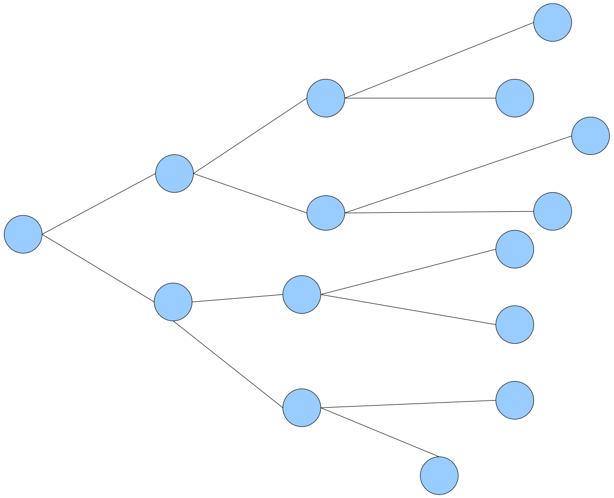
- 3.3.2 einige Verfahren - ein wichtiges Werkzeug: der Binärbaum (2)
  - Baum, bei dem kein Knoten nur einen Kindknoten besitzt, ist ein **<u>voller Binärbaum</u>**. Jeder Knoten besitzt dann zwei Kindknoten oder ist Blatt.



  - Ein Knoten mit nur einem Kindknoten bedeutet, daß es in dem binären Kodewort eine Position gibt, die immer das selbe Elementarsymbol enthält. Diese Position hat den Informationsgehalt .... Sh **(?)** (Informationsgehalt bezogen auf Elementarsymbole). Diese Position bringt komplett nur (zusätzliche).................................... **(?)**

3.3 Quellkodierung (6)

- 3.3.2 einige Verfahren - ein wichtiges Werkzeug: der Binärbaum (3)
  - voller Baum, bei dem alle Blätter gleich weit vom Wurzelknoten entfernt sind, ist ein <u>**vollständiger Binärbaum**</u>. Jedes Blatt ist gleich viele Knoten vom Wurzelknoten entfernt.



  - Jedes binäre Kodewort hat die selbe Anzahl Positionen von Elementarsymbolen.

3.3 Quellkodierung (7)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit gleichlangen Worten

    Ein Wort aus N binären Elementarsymbolen kann .... **(?)**
    unterschiedliche Werte annehmen.
    Ein Alphabet aus Kodeworten mit jeweils N binären Elementarsymbolen kann maximal .... unterschiedliche Symbole enthalten. **(?)**

    Die Entropie H(X') der Sekundärquelle kann für die Kodeworte und für die Elementarsymbole ermittelt werden.

    Auch wenn die Primärquelle X gedächtnislos ist, so ist die Frage des Gedächtnisses für die Elementarsymbole der Primärquelle X' extra zu klären.

    Warum?

3.3 Quellkodierung (8)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit gleichlangen Worten

    Einige (**?**) dieser Kodes entsprechen vollständigen Binärbäumen.

    Oft aus Gründen der technischen Realisierung verwendet.

    (Beispiele: ...., ...)

3.3 Quellkodierung (9)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten / mit Trennzeichen

    Symbolen der Primärquelle X mit hoher Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ werden .... Symbole der Sekundärquelle X' zugeordnet **(?)**

    Binärer Kode: $H(X') \geq H(X)$ **(?)**

    Sind mit dem Binärbaum nicht abbildbar, da es .... Elementarsymbole **(?)** gibt („0“, „1“, ...).

(Beispiele: Morsekode)

3.3 Quellkodierung (10)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten / Präfixkode

    Symbolen der Primärquelle X mit hoher Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ werden .... Symbole der Sekundärquelle X' zugeordnet **(?)**

    Binärer Kode: $H(X') \geq H(X)$

    Kein Kodewort ist .... (Präfix).

    abbildbar mit dem Binärbaum

    (Beispiele)

3.3 Quellkodierung (11)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten / Präfixkode

    Betrachtung zur Wirksamkeit (Redundanzminderung)

    keine Redundanz → <u>idealer Kode</u>

    $\overline{n} = H(X)/Sh$ binäres Sekundäralphabet

    $\overline{n} = H(X)/Sh/ld\ r$ Sekundäralphabet mit r Symbolen

    geringste Redundanz, bei kürzestmöglicher Kodierung des Alphabets
    → <u>optimaler oder kompakter Kode</u>

    $\overline{n} > H(X)/Sh$ binäres Sekundäralphabet

    $\overline{n} > H(X)/Sh/ld\ r$ Sekundäralphabet mit r Symbolen

$$\overline{n}:$$

3.3 Quellkodierung (12)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten / Präfixkode

    <u>Huffman-Kode</u>

    Präfixcode mit Bildungsregel zur Minimierung der Redundanz
    bei gedächtnislosen Quellen

    1. Symbole des Primärkodes nach fallendem P ordnen

    2. Beide Symbole mit kleinstem P zu neuem (pseudo-)Symbol
       kombinieren, Symbole neu nach fallendem P ordnen
       2. erneut durchlaufen, bis alle Symbole kombiniert sind

    3. Binäre Kodeworte des Sekundärkodes bilden und den Symbolen
       des Primärkodes zuordnen: Kombinationspfade rückwärts
       durchlaufen, an jedem Knoten jedem Pfad 0 bzw. 1 zuordnen,
       Kodeworte des Sekundärkodes ergeben sich aus den Pfaden zu
       den jeweiligen Symbolen des Primärkodes

3.3 Quellkodierung (13)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Alphabet (Kode) mit unterschiedlich langen Worten / Präfixkode

    <u>Huffman-Kode</u>

    Nebenbedingung:

    Bei (pseudo-)Symbolen mit gleichem P werden die kombiniert, die weniger zusammengefaßte (pseudo-)Symbole enthalten.

      Beispiel → ...

3.3 Quellkodierung (14)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Huffman-Kode - Beispiel (Aber stimmen die Werte auch?)

x_i	a	b	c	d	e	f	
P_i	0,1	0,2	0,15	0,05	0,2	0,3	
$I(x_i)$ / Sh	3,32	2,32	2,74	4,32	2,32	1,74	
H(X) / Sh							**2,41**
x'_i	0001	11	001	0000	10	01	
n' / Bit							**2,45**

mittlere Kodewortlänge: $\overline{n} = \sum_{i=1}^{N} p_i n_i$ .... Bit **(?)**

Effizienz des Kodes: $\eta = \frac{H(X)}{\overline{n}}$ 0,......... Sh/Bit **(?)**

Vergleich zu Kode mit 3 Bit / Wort: n=3 0,......... Sh/Bit **(?)**

3.3 Quellkodierung (15)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - modifizierter Huffman-Kode beim FAX
    - Klasse G3 enthält diese Kodierung
    - Lauflängenkodierung
    - Die Vorlage wird schwarz / weiß zeilenweise abgetastet und jeder Punkt auf der Zeile mit 1 oder 0 dargestellt (1728 Punkte / Zeile).
    - Zusammenhängende Bereiche mit dem gleichen Wert werden im Sekundäralphabet jeweils durch ein Kodewort unterschiedlicher Länge kodiert.
    - Die Längen (Anzahl der Punkte) selbst sind noch nicht die sekundären Kodeworte.
    - Die sekundären Kodeworte ergeben sich aus einer Zuordnungstabelle. In dieser Tabelle ist jedem Längenwert für schwarz ein sekundäres Kodewort und für weiß ein sekundäres Kodewort zugeordnet. Diese unterschiedlich langen Kodeworte genügen einem Huffman-Kode.

3.3 Quellkodierung (16)

- 3.3.2 einige Verfahren - modifizierter Huffman-Kode beim FAX

White run length	Code word	Black run length	Code word
0	00110101	0	0000110111
1	000111	1	010
2	0111	2	11
3	1000	3	10
4	1011	4	011
5	1100	5	0011
6	1110	6	0010
7	1111	7	00011
8	10011	8	000101
9	10100	9	000100
10	00111	10	0000100
11	01000	11	0000101
12	001000	12	0000111
13	000011	13	00000100
14	110100	14	00000111
15	110101	15	000011000
16	101010	16	0000010111
17	101011	17	0000011000
18	0100111	18	0000001000
19	0001100	19	00001100111
20	0001000	20	00001101000

Tabelle für Fax Gruppe 3 (Auszug)

Quelle: Skript Prof. W. Effelsberg, UNI Freiburg

3.3 Quellkodierung (17)

- 3.3.2 einige Verfahren
  - Huffmann-Kode
    Anwendung z. B. beim Fax
  - Shannon – Fano – Kodierung
    Vorgänger zum Huffmann-Kode
    meist nicht so gute Ergebnisse wie Huffmann-Kode
  - Arithmetisches Kodieren
    moderneres Verfahren, wesentlich rechenintensiver, GKZ
  - universelle Komprimierungsverfahren
    Lempel-Ziv: LZ / Lempel-Ziv-Welch: LZW
    Lempel-Ziv-Markow: LZM